
Technische Mechanik Formelsammlung

Version: Oktober 2019

Nachfolgend wird von den Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik:

- Massenerhaltung
- Impulserhaltung
- Drehimpulserhaltung
- Energieerhaltung

- ohne zusätzlichen Hinweis darauf - Gebrauch gemacht.

Inhaltsverzeichnis

Statik

Ebene Statik.....	<u>1</u>
Lasten (Kräfte und Momente).....	<u>1</u>
Tragwerkselemente.....	<u>4</u>
Lagerungen.....	<u>5</u>
Gelenke.....	<u>6</u>
Schnittgrößen beim Balken	<u>7</u>
Räumliche Probleme.....	<u>8</u>
Lasten (Kräfte und Momente).....	<u>8</u>
Lagerungen und Gelenke (Beispiele)	<u>10</u>
Schnittgrößen beim Balken	<u>11</u>
Reibung	<u>12</u>

Festigkeitslehre

Grundlagen	<u>13</u>
Spannungen.....	<u>13</u>
Verzerrungen	<u>15</u>
HOOKEsches Gesetz	<u>16</u>
Zulässige Spannungen.....	<u>18</u>
Vergleichsspannungen.....	<u>19</u>
Linientragwerke.....	<u>21</u>
Zug (Druck)	<u>21</u>
Biegung.....	<u>21</u>
Reine Torsion.....	<u>24</u>
Querkraftschub.....	<u>25</u>
Federn	<u>26</u>
Einflusszahlen	<u>27</u>
Satz von CASTIGLIANO	<u>27</u>
Stabilität	<u>28</u>
Stabilitätsproblem Knicken	<u>28</u>

Flächentragwerke.....	29
Rotationsschalen.....	29
Kreis- und Kreisringscheiben	30
Kreis- und Kreisringplatten	31

Kinematik

Kinematik des Punktes.....	33
Kinematik des starren Körpers	35

Kinetik starrer Körper

Translation	37
Beliebige Bewegung	38
Bewegung in der x,y -Ebene	40
Gerader zentraler Stoß.....	42
LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art	43
Schwingungen mit dem Freiheitsgrad 1	44
Schwingungen mit einem Freiheitsgrad größer 1	48

Geometrie- und masseabhängige Kennwerte

Schwerpunkt ebener Linienstrukturen	49
Schwerpunkt ebener Flächen.....	50
Schwerpunkt von Körpern	51
Flächenmomente 2. Ordnung.....	52
Trägheits- und Widerstandsmomente gegenüber Torsion.....	54
Massenmomente 2. Ordnung	55

Ergänzungen.....	59
------------------	--------------------

Statik

Ebene Statik

Lasten (Kräfte und Momente)

(Einzel-)Kraft \vec{F}

Vektorielle Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_x + \vec{F}_y \\ &= F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y\end{aligned}$$

Betrag, Richtung

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

Koordinaten

$$F_x = F \cos \alpha = F \sin \beta$$

$$F_y = F \sin \alpha = F \cos \beta$$

Moment bezüglich der z-Achse

$$\vec{M}_z = M_z \vec{e}_z = (x F_y - y F_x) \vec{e}_z$$

Resultierende Kraft aus n Kräften

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\tan \alpha_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

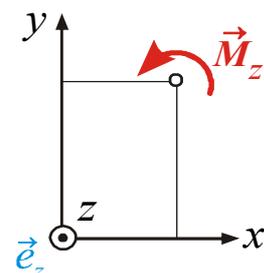
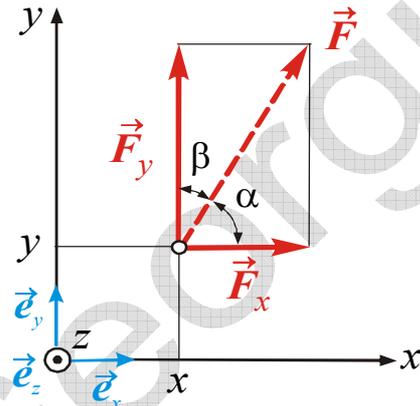
$$\text{mit: } F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

(Einzel-)Moment \vec{M}_z

Vektorielle Darstellung

$$\vec{M}_z = M_z \vec{e}_z$$



Resultierendes Moment aus n Kräften und m Einzelmomenten

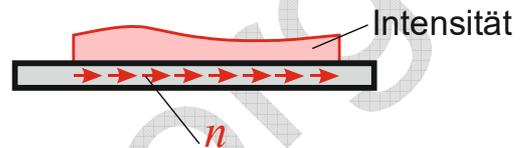
$$M_{Rz} = \sum_{i=1}^n M_{iz} + \sum_{k=1}^m M_{kz} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum_{k=1}^m M_{kz}$$

Gleichung der Wirkungslinie der äquivalenten Kraft

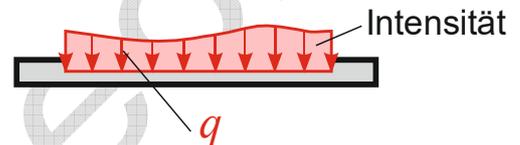
$$y = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} x - \frac{M_{Rz}}{F_{Rx}}$$

Streckenlasten (auch: Linienlasten)

in Längsrichtung des Balkens n :



in Querrichtung des Balkens q :



Reduktion der Streckenlasten \rightarrow äquivalente Einzellasten:
(demonstriert an Streckenlast q)

		$F_R = \int_0^l q(z) dz$ $z_R = \frac{1}{F_R} \int_0^l q(z) z dz$
		$F_R = q_0 l$ $z_R = \frac{l}{2}$
		$F_R = \frac{q_0 l}{2}$ $z_R = \frac{2}{3} l$

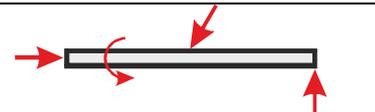
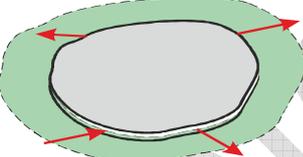
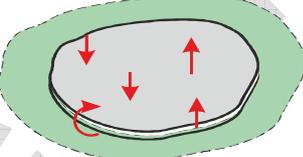
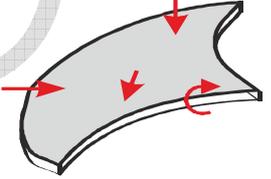
Gleichgewichtsbedingungen

Kräftegleichgewicht	Momentengleichgewicht
$\vec{F}_R = \vec{0}$	$M_{Rz} = 0$
$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$	$\sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum_{k=1}^m M_{kz} = 0$

mit:

- m - Anzahl der Einzelmomente (inklusive der reduzierten)
- n - Anzahl der Einzelkräfte (inklusive der reduzierten)

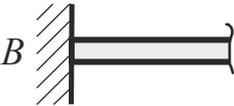
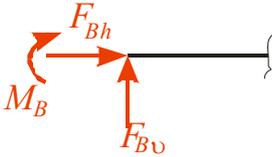
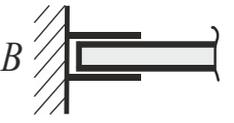
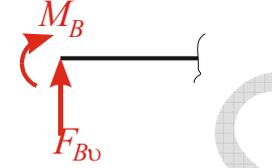
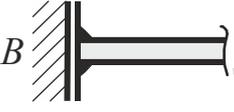
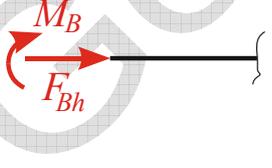
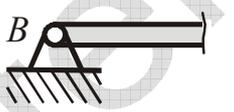
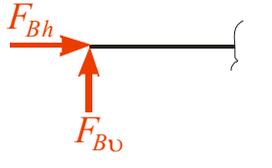
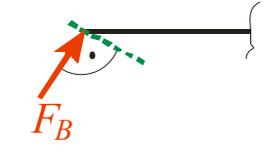
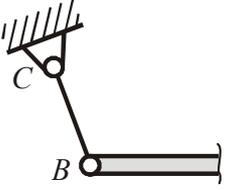
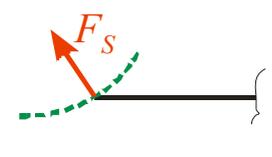
Tragwerkselemente

Linientragwerke	
Eine Hauptabmessung dieser Tragwerke ist wesentlich größer als die beiden anderen.	
	Seil, Kette
oder:  	(Fachwerk-)Stab
oder:  	Torsionsstab
	Knickstab
	(Biege-)Balken
Flächentragwerke	
Zwei Hauptabmessungen dieser Tragwerke sind wesentlich größer als die dritte.	
	Scheibe (Belastung in Mittelfläche)
	Platte (nur bei räumlichen Problemen) (Belastung \perp Mittelfläche)
	Schale (nur bei räumlichen Problemen)
3D-Körper (nur bei räumlichen Problemen)	
Alle Hauptabmessungen dieser Tragwerke liegen in der gleichen Größenordnung.	

Zwischen Stab und Balken bzw. zwischen Scheibe und Platte unterscheidet nur die Belastung. Die Geometrie kann jeweils gleich sein.

Lagerungen

(Verbindungen von Linien- bzw. Flächentragwerken mit Umgebung)

Bezeichnung	Symbol	Lagerreaktionen	Reduzierter Freiheitsgrad
Feste Einspannung			0
Tangential (zur Balkenlängsachse) verschiebbliche Einspannung (Schiebehülse)			1 (Verschiebung von B tangential zur Balkenlängs- achse)
Normal (zur Balkenlängsachse) verschiebbliche Einspannung (Parallelführung)			1 (Verschiebung von B normal zur Balkenlängs- achse)
Festlager (gelenkiges Lager)			1 (Drehung um B)
Loslager (Rollenlager)			2 (Verschiebung von B entlang der Gleitebene, Drehung um B)
Pendelstütze (Stützstab, Seil)			2 (Verschiebung von B auf Kreis- bogen um C , Drehung um B)

Zug-/Druckfeder (Federkonstante c)			2 (horizontale Verschiebung von B, Drehung um B)
Drehfeder (Federkonstante c_t)			2 (horizontale und vertikale Verschiebung von B)

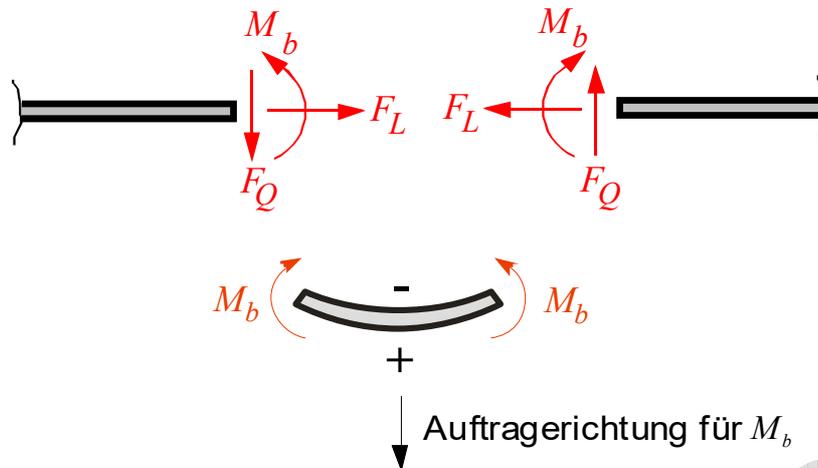
Gelenke

(Verbindungen von Linien- und/oder Flächentragwerken miteinander)

Bezeichnung	Symbol	Gelenkaktionen und -reaktionen	Reduzierter Freiheitsgrad
(Momenten-) Gelenk			1 (Drehung um G)
Normalkraftgelenk (Schiebehülse)			1 (relative Ver- schiebung beider Balken tangential zu deren Längs- achsen)
Querkraftgelenk (Parallelführung)			1 (relative Ver. Schiebung beider Balken normal zu deren Längs- achsen)

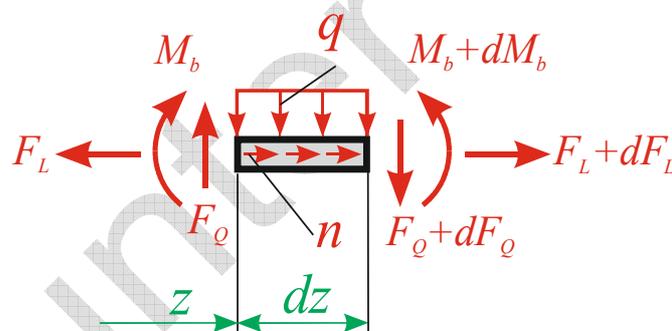
Schnittgrößen beim Balken

Definition



mit: F_L – Längskraft (auch: F_N – Normalkraft)
 F_Q – Querkraft
 M_b – Biegemoment

Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Streckenlasten



$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_b(z)}{dz} &= \pm F_Q(z) \\ \frac{dF_Q(z)}{dz} &= \mp q(z) \end{aligned} \right\} \frac{d^2 M_b(z)}{dz^2} = -q(z)$$

$$\frac{dF_L(z)}{dz} = \mp n(z)$$

Für entgegengesetztes z gelten die unteren Vorzeichen.

Räumliche Probleme

Lasten (Kräfte und Momente)

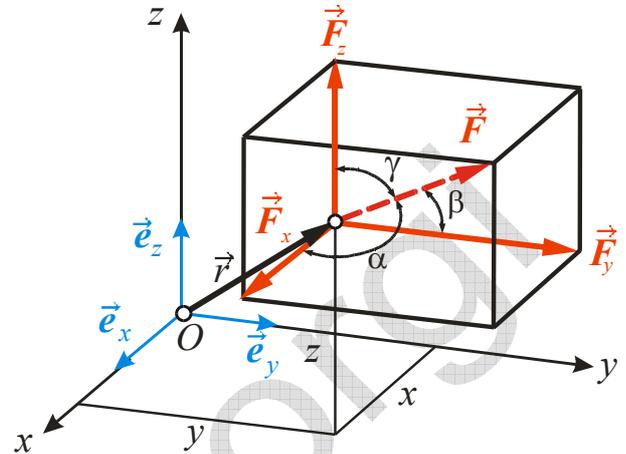
(Einzel-)Kraft \vec{F}

Vektorielle Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \\ &= F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z\end{aligned}$$

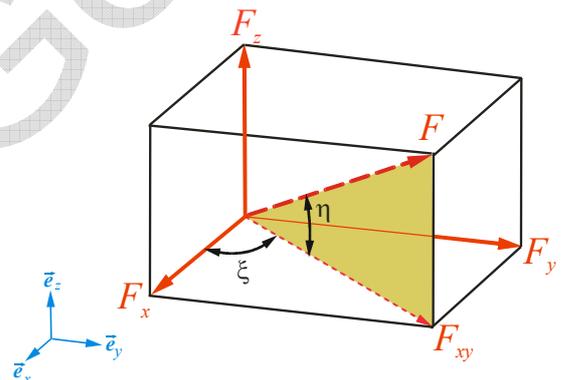
Betrag

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



Koordinaten

$$\begin{aligned}F_x &= F \cos \alpha = F \cos \eta \cos \xi \\ F_y &= F \cos \beta = F \cos \eta \sin \xi \\ F_z &= F \cos \gamma = F \sin \eta\end{aligned}$$



Moment bezüglich des Punktes O

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z$$

mit: $M_x = y F_z - z F_y$

$$M_y = z F_x - x F_z$$

$$M_z = x F_y - y F_x$$

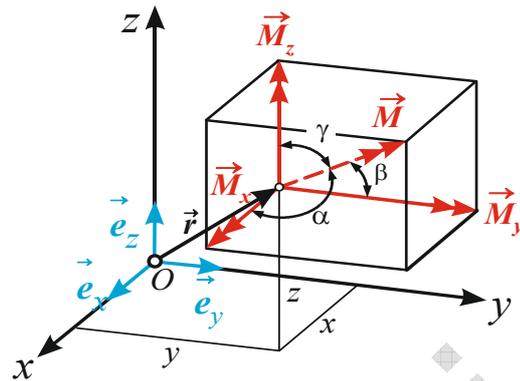
Resultierende Kraft aus n Kräften

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

(Einzel-)Moment \vec{M}

Vektorielle Darstellung

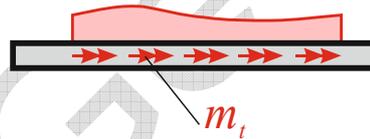
$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z \\ &= M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z\end{aligned}$$

*Resultierendes Moment aus n Kräften und m Einzelmomenten*

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k$$

Weitere Streckenlast

Torsionsstreckenlast

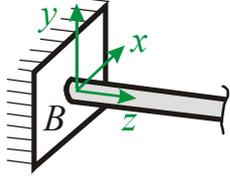
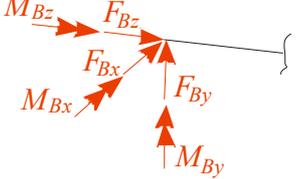
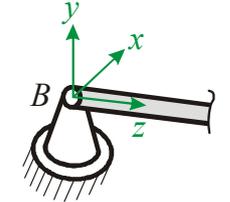
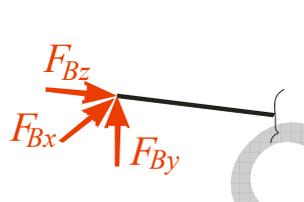
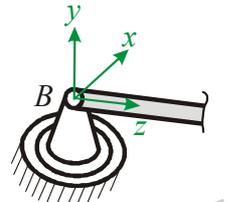
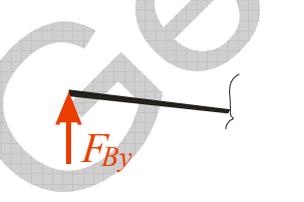
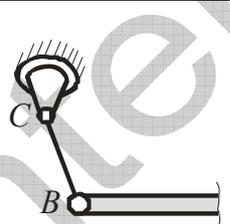
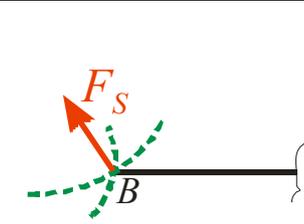
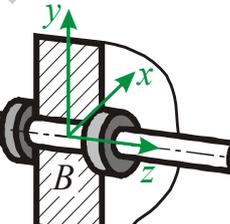
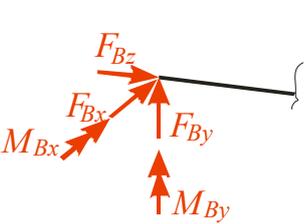
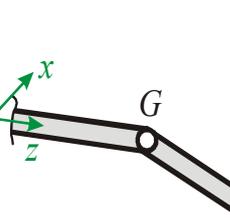
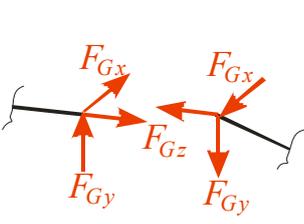
**Gleichgewichtsbedingungen**

Kräftegleichgewicht	Momentengleichgewicht
$\vec{F}_R = \vec{0}$	$\vec{M}_R = \vec{0}$
$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$	$\sum_{i=1}^n (y_i F_{zi} - z_i F_{yi}) + \sum_{k=1}^m M_{kx} = 0$
$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$	$\sum_{i=1}^n (z_i F_{xi} - x_i F_{zi}) + \sum_{k=1}^m M_{ky} = 0$
$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$	$\sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}) + \sum_{k=1}^m M_{kz} = 0$

mit:

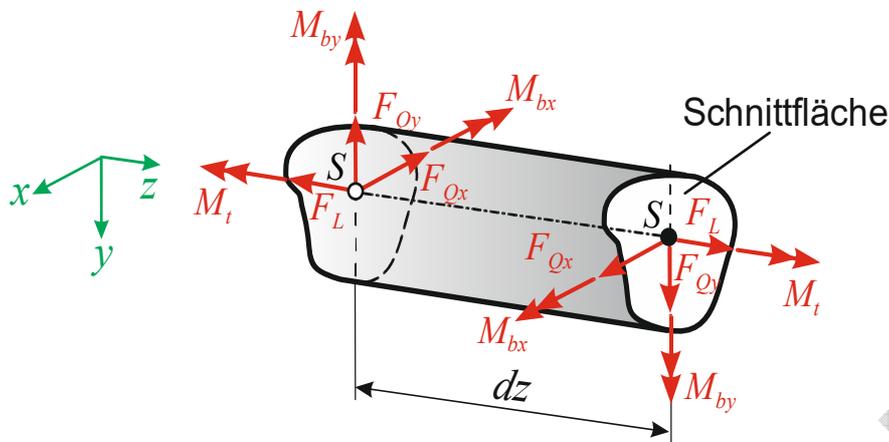
 m - Anzahl der Einzelmomente (inklusive der reduzierten) n - Anzahl der Einzelkräfte (inklusive der reduzierten)Reduzierte Lasten - Integrale von Linien-, Flächen- und Volumenlasten (analog zu [S. 2](#)).

Lagerungen und Gelenke (Beispiele)

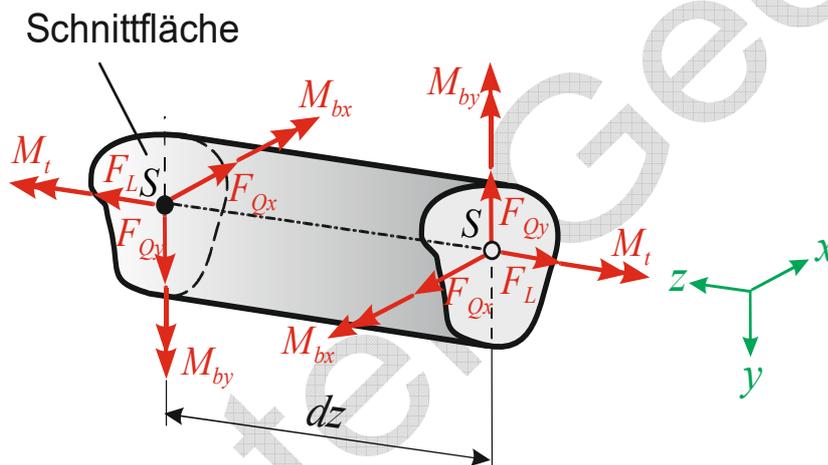
Bezeichnung	Symbol	Lagerreaktionen	Reduzierter Freiheitsgrad
(Feste) Einspannung			0
Festlager (gelenkiges Lager)			3 (Drehung um x-, y-, z-Achse durch B)
Loslager (Rollenlager)			5 (Drehung um x-, y-, z-Achse durch B, Verschiebung in x- und z-Richtung)
Pendelstütze (Stützstab, Seil)			5 (Verschiebung von B auf Kugel­fläche mit Radius \overline{BC} um C, Drehung um B)
Hülse (ohne axiale Verschieblichkeit)			1 (Drehung um z-Achse)
(Momenten-) Gelenk			3 (Drehung um x-, y-, z-Achse durch G)

Schnittgrößen beim Balken

Definition



oder:



mit: F_L - Längskraft (auch: F_N – Normalkraft)
 F_{Qx}, F_{Qy} - Querkräfte
 M_{bx}, M_{by} - Biegemomente
 M_t - Torsionsmoment

Achsen x, y, z bilden körperfestes Rechtssystem
 z -Achse entlang der Schwerpunktschwerachse, zeigt bei
 größerem Koordinatenwert aus dem Querschnitt heraus
 y -Achse zeigt nach unten

Reibung

Haftreibung $|F_H| \leq \mu_0 F_N$

Gleitreibung $F_{Gl} = \mu F_N$, entgegengesetzt zur Relativgeschwindigkeit

Rollreibung $F_{Ro} = \frac{f}{R} F_N$

Seilreibung $F_{S2} \leq F_{S1} e^{\mu_0 \alpha}$ Haften
 $F_{S2} = F_{S1} e^{\mu \alpha}$ Gleiten

mit:

- F_H - Haftreibungskraft
- F_{Gl} - Gleitreibungskraft
- F_{Ro} - Rollreibungskraft
- F_N - Normalkraft (Druckkraft)
- F_{S1}, F_{S2} - Seilkräfte
- μ_0 - Haftreibungskoeffizient
- μ - Gleitreibungskoeffizient
- f - Hebelarm der Rollreibung
- R - Radius des Rollkörpers
- α - Umschlingungswinkel

} meist: $\frac{f}{R} \ll \mu$

Festigkeitslehre

Grundlagen

Spannungen

Spannungsvektor

$$\vec{t} = \frac{d\vec{F}}{dA} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{s}$$

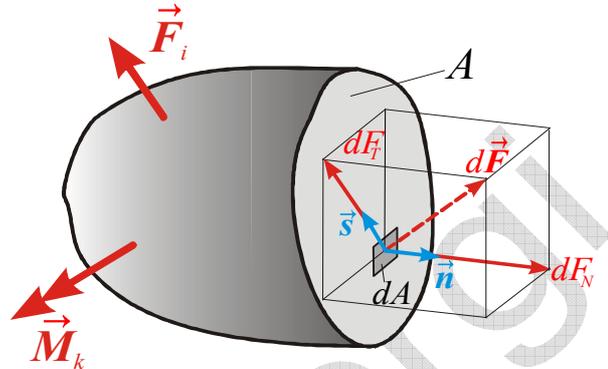
mit: Koordinaten:

$$\sigma = \frac{dF_N}{dA}$$

Normalspannung

$$\tau = \frac{dF_T}{dA}$$

Tangentialspannung
oder Schubspannung



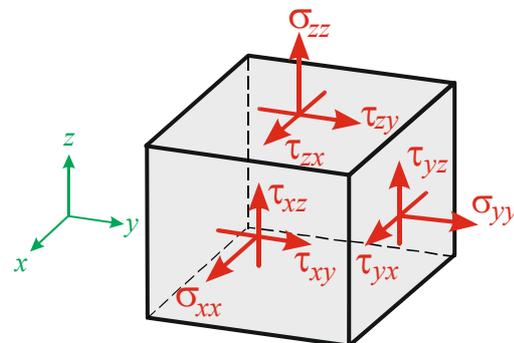
\vec{n} - Einheitsvektor in Normalenrichtung

\vec{s} - Einheitsvektor in Tangentenrichtung

Räumlicher Spannungszustand

Spannungstensor

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \quad k, l = x, y, z$$

$$\tau_{kl} = \sigma_{kl}$$

Hauptspannungen σ_i ($i = 1, 2, 3$) aus:

$$\sigma_i^3 - S_1 \sigma_i^2 + S_2 \sigma_i - S_3 = 0 \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\text{mit: } S_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$S_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$S_3 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_{xx} \tau_{yz}^2 - \sigma_{yy} \tau_{zx}^2 - \sigma_{zz} \tau_{xy}^2$$

Hauptspannungsrichtungen \vec{n}_i aus:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_i) n_{ix} + \tau_{xy} n_{iy} + \tau_{xz} n_{iz} = 0$$

$$\tau_{yx} n_{ix} + (\sigma_{yy} - \sigma_i) n_{iy} + \tau_{yz} n_{iz} = 0$$

$$\tau_{zx} n_{ix} + \tau_{zy} n_{iy} + (\sigma_{zz} - \sigma_i) n_{iz} = 0$$

$$\text{mit: } \vec{n}_i = n_{ix} \vec{e}_x + n_{iy} \vec{e}_y + n_{iz} \vec{e}_z \quad \begin{array}{l} \text{Einheitsvektor der } i\text{-ten} \\ \text{Hauptspannungsrichtung} \end{array}$$

$$n_i^2 = \sum_{(k)} n_{ik}^2 = 1 \quad k = x, y, z$$

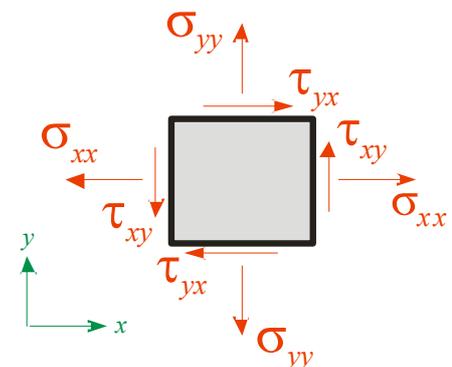
Ebener Spannungszustand (ESZ)

Spannungstensor

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \quad k, l = x, y$$

$$\tau_{kl} = \sigma_{kl}$$

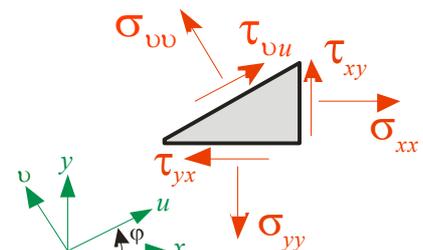


Für gedrehtes Koordinatensystem

$$\sigma_{uu} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{vv} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{uv} = \tau_{vu} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$



Hauptspannungen

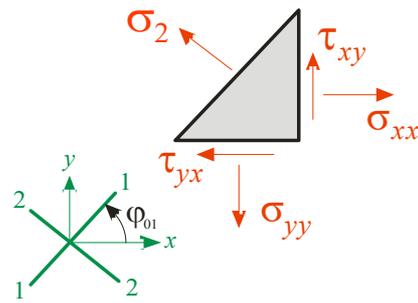
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hauptspannungsrichtungen

$$\tan 2\varphi_{01,02} = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

$$\tan \varphi_{01} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_2}$$

für eindeutige Hauptspannungsrichtung 1



Verzerrungen

Verschiebungsvektor

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$$

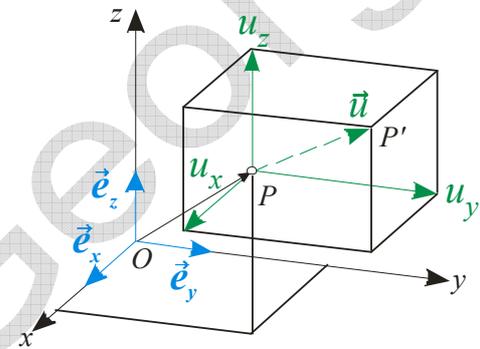
$$= u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z$$

Räumlicher Verzerrungszustand Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad k, l = x, y, z$$

$$\gamma_{kl} = 2 \varepsilon_{kl}$$



Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_{z,z}$$

Gleitungen

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = u_{x,y} + u_{y,x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = u_{y,z} + u_{z,y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = u_{x,z} + u_{z,x}$$

Ermittlung der Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen wie beim räumlichen Spannungszustand ($\sigma_{kl} \leftrightarrow \varepsilon_{kl}$) [S. 14](#)

Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad k, l = x, y$$

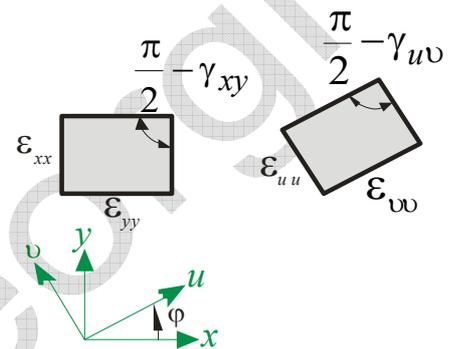
$$\gamma_{kl} = 2 \varepsilon_{kl}$$

Für gedrehtes Koordinatensystem

$$\varepsilon_{uu} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\varepsilon_{vv} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\gamma_{uv} = \gamma_{vu} = -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi$$



Ermittlung der Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen wie beim ebenen Spannungszustand ($\sigma_{kl} \leftrightarrow \varepsilon_{kl}$) [S. 15](#)

HOOKEsches Gesetz

Voraussetzung: isotropes Material

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

mit: $E = 2(1 + \nu) G$

E – Elastizitätsmodul (YOUNG's Modul)

G – Schubmodul

ν – Querkontraktionszahl ($m = \frac{1}{\nu}$ - POISSON'sche Zahl)

α – Temperaturdehnzahl

ΔT - Temperaturdifferenz

Sonderfall: Ebener Spannungszustand (ESZ)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Sonderfall: Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu) \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] + (1 + \nu) \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu) \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] + (1 + \nu) \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Zulässige Spannungen

$$\sigma_{zul} = \begin{cases} \frac{\sigma_F}{S_F} & \text{zähes Material} \\ \frac{\sigma_B}{S_B} & \text{sprödes Material} \end{cases}$$

- mit: σ_F – Fließfestigkeit (R_e)
 σ_B – Bruchfestigkeit (R_m)
 S_F – Sicherheitsfaktor gegen Fließen ($S_F = 1,2 \dots 2$)
 S_B – Sicherheitsfaktor gegen Bruch ($S_B = 4 \dots 9$)

Sicherheitsfaktoren aus Regelwerken für jeweilige Anwendung

Bei anisotropem Material zusätzlich $\sigma_{d\,zul}$ mit analoger Definition.

Vergleichsspannungen

Festigkeitskriterium

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul}$$

mit: σ_v – Vergleichsspannung

Bei anisotropem Material zusätzlich $\sigma_{vd} \leq \sigma_{d zul}$

Allgemein

Formulierung mit den Hauptspannungen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ [S. 14](#)

■ Normalspannungshypothese

Isotropes Material:

$$\sigma_1 \geq |\sigma_3|: \quad \sigma_{v1} = \sigma_1$$

$$|\sigma_1| < |\sigma_3|: \quad \sigma_{v1} = |\sigma_3|$$

Anisotropes Material:

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_3 \geq 0: \quad \sigma_{v1} = \sigma_1$$

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_3 < 0: \quad \sigma_{v1} = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{v1d} = |\sigma_3|$$

$$\sigma_1 \leq 0, \quad \sigma_3 < 0: \quad \sigma_{v1d} = |\sigma_3|$$

■ Schubspannungshypothese

$$\sigma_{v2} = \sigma_1 - \sigma_3$$

■ Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\begin{aligned} \sigma_{v3} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right]} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \end{aligned}$$

Analog für Zylinderkoordinaten:

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 \right]} + 3(\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{zr}^2)$$

Linientragwerke (Balken, Wellen) [S. 21 ff](#)

- Normalspannungshypothese

Formulierung mit den Hauptspannungen $\sigma_1 \geq \sigma_2$ (ESZ) [S. 15](#)

Isotropes Material:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \geq |\sigma_2|: & \quad \sigma_{v1} = \sigma_1 \\ |\sigma_1| < |\sigma_2|: & \quad \sigma_{v1} = |\sigma_2| \end{aligned}$$

Anisotropes Material:

$$\begin{aligned} \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 \geq 0: & \quad \sigma_{v1} = \sigma_1 \\ \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 < 0: & \quad \sigma_{v1} = \sigma_1 \text{ und } \sigma_{v1d} = |\sigma_2| \\ \sigma_1 \leq 0, \quad \sigma_2 < 0: & \quad \sigma_{v1d} = |\sigma_2| \end{aligned}$$

- Schubspannungshypothese

$$\sigma_{v2} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$$

- Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$$

Flächentragwerke (Behälter, Scheiben, Platten – ESZ)

- Gestaltänderungsenergiehypothese

Behälter [S. 28](#)

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_u^2 - \sigma_l \sigma_u}$$

Scheiben, Platten [S. 29 ff](#)

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi}}$$

Linientragwerke

Zug (Druck)

Spannung

$$\sigma_{zz}(z) = \frac{F_L(z)}{A(z)}$$

Verformung

$$\varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz} = \frac{F_L}{EA} + \alpha \Delta T$$

Sonderfall: $\sigma_{zz} = \text{konst.}, \Delta T = 0$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta l}{l}$$

mit: A - Querschnittsfläche
 EA - Dehnsteifigkeit
 Δl - Längenänderung
 l - Ursprungslänge

Biegung

(Definition der Schnittgrößen [S. 11](#), Definition der Verschiebungskor-
 dinaten [S. 15](#), Definition der Flächenmomente 2. Ordnung [S. 51](#))

Spannung

- Gerade Biegung (Biegung um Hauptträgheitsachse x)

$$\sigma_{zz} = \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y$$

$$|\sigma_{zz}|_{\max} = \frac{|M_{bx}|_{\max}}{W_{bx}}$$

mit: $W_{bx} = \frac{I_{xx}}{|y|_{\max}}$ Widerstandsmoment gegenüber Biegung

- Schiefe Biegung, x, y – Hauptträgheitsachsen, einschließlich Längskrafteinfluss

$$\sigma_{zz} = \frac{F_L}{A} + \frac{M_{bx}}{I_{xx}} y - \frac{M_{by}}{I_{yy}} x$$

Gleichung der Spannungsnulllinie ($\sigma_{zz} = 0$)

$$y = \frac{M_{by}}{M_{bx}} \frac{I_{xx}}{I_{yy}} x - \frac{F_L}{M_{bx}} \frac{I_{xx}}{A}$$

- Schiefe Biegung, x, y – beliebige Schwerpunktsachsen, einschließlich Längskrafteinfluss

$$\sigma_{zz} = \frac{F_L}{A} + \frac{M_{bx} I_{yy} - M_{by} I_{xy}}{I_{\Delta}} y + \frac{M_{bx} I_{xy} - M_{by} I_{xx}}{I_{\Delta}} x$$

mit: $I_{\Delta} = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2$

Gleichung der Spannungsnulllinie ($\sigma_{zz} = 0$)

$$y = - \frac{M_{bx} I_{xy} - M_{by} I_{xx}}{M_{bx} I_{yy} - M_{by} I_{xy}} x - \frac{F_L}{A} \frac{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}{M_{bx} I_{yy} - M_{by} I_{xy}}$$

Verformung

- Gerade Biegung (Biegung um Hauptträgheitsachse x)

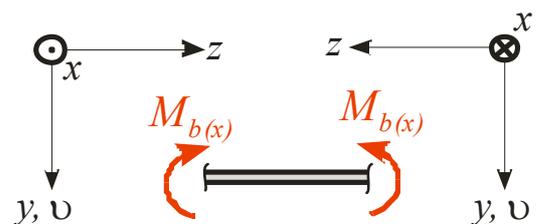
Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$v'' = - \frac{M_{b(x)}}{EI_{(xx)}}$$

mit: $v' = \frac{dv}{dz}$ Neigung

$EI_{(xx)}$ – Biegesteifigkeit

$I_{(xx)}$ – axiales Flächenträgheitsmoment [S. 51](#)



Randbedingungen für v bzw. v'

Differenzialgleichung 4. Ordnung

$$v'''' = \frac{q_{(y)}}{EI_{(xx)}}$$

Randbedingungen für v , v' , $v'' \sim M_{b(x)}$, bzw. $v''' \sim F_{Q(y)}$

- Schiefe Biegung, x, y – Hauptträgheitsachsen

$$v'' = -\frac{M_{bx}}{EI_{xx}}$$

$$u'' = \frac{M_{by}}{EI_{yy}}$$

- Schiefe Biegung, x, y – beliebige Schwerpunktsachsen

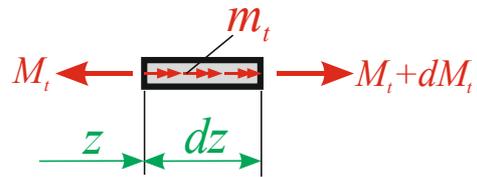
$$v'' = \frac{1}{EI_{\Delta}} \left(-M_{bx} I_{yy} + M_{by} I_{xy} \right)$$

$$u'' = \frac{1}{EI_{\Delta}} \left(M_{by} I_{xx} - M_{bx} I_{xy} \right)$$

Reine Torsion

Spannung

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$



Verformung

$$\vartheta = \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_t}{GI_t}$$

mit: φ_z - Verdrehwinkel

l - Stablänge

ϑ - Drillung

GI_t - Torsionssteifigkeit

I_t - Torsionsträgheitsmoment

W_t - Widerstandsmoment gegenüber Torsion

$$m_t = - \frac{dM_t}{dz} \text{ - Torsionsstreckenlast}$$

Sonderfall: Kreis(ring)querschnitt

$$\tau(r) = \frac{M_t}{I_p} r \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}$$

mit: I_p - polares Flächenträgheitsmoment $I_p = I_t = 2 I_{xx} = 2 I_{yy}$

$W_p = \frac{I_p}{r_a}$ - polares Widerstandsmoment $W_p = W_t = 2 W_{bx} = 2 W_{by}$

r - (beliebiger) Radius innerhalb des Querschnitts

r_a - Außenradius

Trägheits- und Widerstandsmomente gegenüber Torsion [S. 53](#)

Querkraftschub

Voraussetzung: x, y – Hauptträgheitsachsen

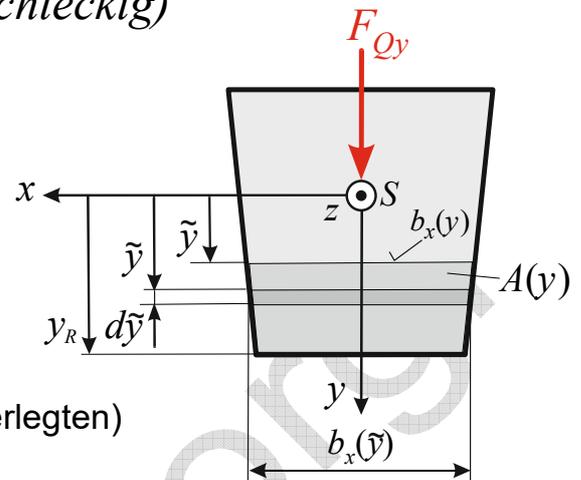
Massive Querschnitte (annähernd rechteckig)

Schubspannungen

$$\tau_{zy}(y) = \frac{F_{Qy} S_x(y)}{I_{xx} b_x(y)}$$

$$\text{mit: } S_x(y) = \int_y^{y_R} \tilde{y} b_x(\tilde{y}) d\tilde{y}$$

statisches Moment der (unterlegten)
Restfläche $A(y)$



Analog:

$$\tau_{zx}(x) = \frac{F_{Qx} S_y(x)}{I_{yy} b_y(x)}$$

Dünnwandige offene Querschnitte

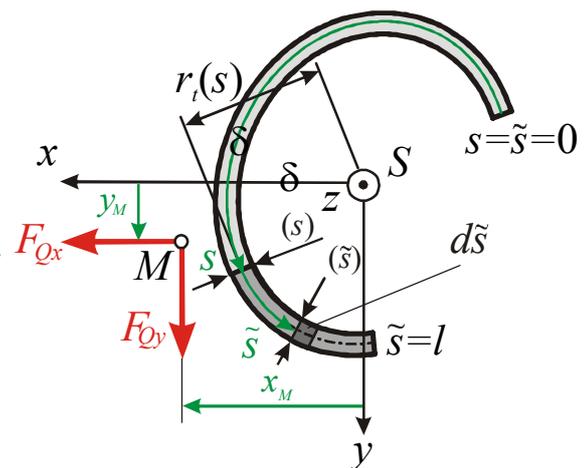
Schubspannungen

$$\tau_{zs}(s) = \frac{F_{Qy} S_x(s)}{I_{xx} \delta(s)} + \frac{F_{Qx} S_y(s)}{I_{yy} \delta(s)}$$

mit:

$$S_x(s) = \int_s^l y(\tilde{s}) \delta(\tilde{s}) d\tilde{s} = - \int_0^s y(\tilde{s}) \delta(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

$$S_y(s) = \int_s^l x(\tilde{s}) \delta(\tilde{s}) d\tilde{s} = - \int_0^s x(\tilde{s}) \delta(\tilde{s}) d\tilde{s}$$



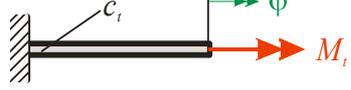
Koordinaten des Schubmittelpunkts M

$$x_M = \frac{1}{I_{xx}} \int_0^l S_x(s) r_t(s) ds$$

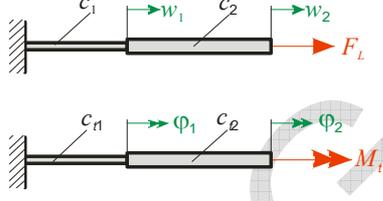
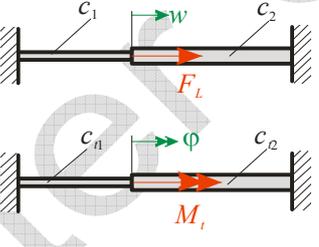
$$y_M = - \frac{1}{I_{yy}} \int_0^l S_y(s) r_t(s) ds$$

Federn

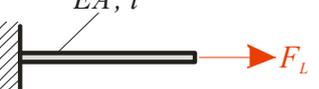
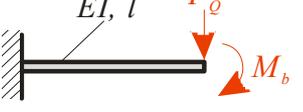
Federgesetze

Feder	Federgesetz	Potenzielle Energie
Zug-/Druck-Feder 	$F = c w$	$U = \frac{1}{2} c w^2$
Drehfeder 	$M_t = c_t \varphi$	$U = \frac{1}{2} c_t \varphi^2$

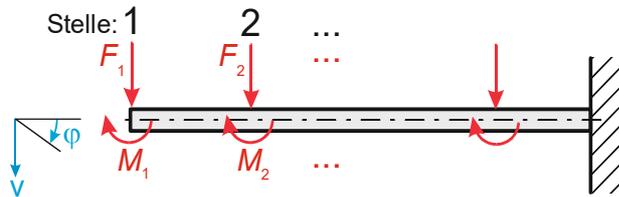
Ersatzfederkonstanten

Federschaltung	Ersatzfederkonstante
Reihenschaltung 	$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$ $\frac{1}{c_t} = \frac{1}{c_{t1}} + \frac{1}{c_{t2}}$
Parallelschaltung 	$c = c_1 + c_2$ $c_t = c_{t1} + c_{t2}$

Federkonstanten elastischer Linientragwerke

Beanspruchungsart	Federkonstanten
Zug 	$c = \frac{EA}{l}$
Biegung 	$F_Q: c = \frac{3 EI}{l^3} \quad c_t = \frac{2 EI}{l^2}$ $M_b: c = \frac{2 EI}{l^2} \quad c_t = \frac{EI}{l}$
Torsion 	$c_t = \frac{GI_t}{l}$

Einflusszahlen



$$v_1 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 + \dots \gamma_{11} M_1 + \gamma_{12} M_2 + \dots$$

$$v_2 = \alpha_{21} F_1 + \alpha_{22} F_2 + \dots \gamma_{21} M_1 + \gamma_{22} M_2 + \dots$$

...

$$\varphi_1 = \delta_{11} F_1 + \delta_{12} F_2 + \dots \beta_{11} M_1 + \beta_{12} M_2 + \dots$$

$$\varphi_2 = \delta_{21} F_1 + \delta_{22} F_2 + \dots \beta_{21} M_1 + \beta_{22} M_2 + \dots$$

...

Symmetrie der Koeffizientenmatrix zur Hauptdiagonalen:
(Vertauschungsgesetz von MAXWELL)

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad \text{mit: } i, j = 1, 2, \dots$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ji}$$

Satz von CASTIGLIANO

Voraussetzungen: x, y – Hauptträgheitsachsen, $\Delta T = 0$

$$v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} = \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} \left[\frac{M_{bxi}}{(EI_{xx})_i} \frac{\partial M_{bxi}}{\partial F_k} + \frac{M_{byi}}{(EI_{yy})_i} \frac{\partial M_{byi}}{\partial F_k} + \frac{M_{ti}}{(GI_t)_i} \frac{\partial M_{ti}}{\partial F_k} + \frac{F_{Li}}{(EA)_i} \frac{\partial F_{Li}}{\partial F_k} + \kappa_{xi} \frac{F_{Qxi}}{(GA)_i} \frac{\partial F_{Qxi}}{\partial F_k} + \kappa_{yi} \frac{F_{Qyi}}{(GA)_i} \frac{\partial F_{Qyi}}{\partial F_k} \right] ds_i$$

$$\varphi_k = \frac{\partial U}{\partial M_k} = \dots \text{ analog}$$

mit: U - linearelastische Verzerrungsenergie

κ_x, κ_y - Schubfaktoren des jeweiligen Querschnitts

Stabilität

Voraussetzungen: diskretes System ist konservativ
 Freiheitsgrad des Systems ist 1

Gleichgewicht

$$\frac{dV}{dq} = 0$$

Gleichgewichtsarten

$$\frac{d^2V}{dq^2} \begin{cases} > 0 & \text{stabiles Gleichgewicht} \\ = 0 & \text{indifferentes Gleichgewicht} \\ < 0 & \text{labiles Gleichgewicht} \end{cases}$$

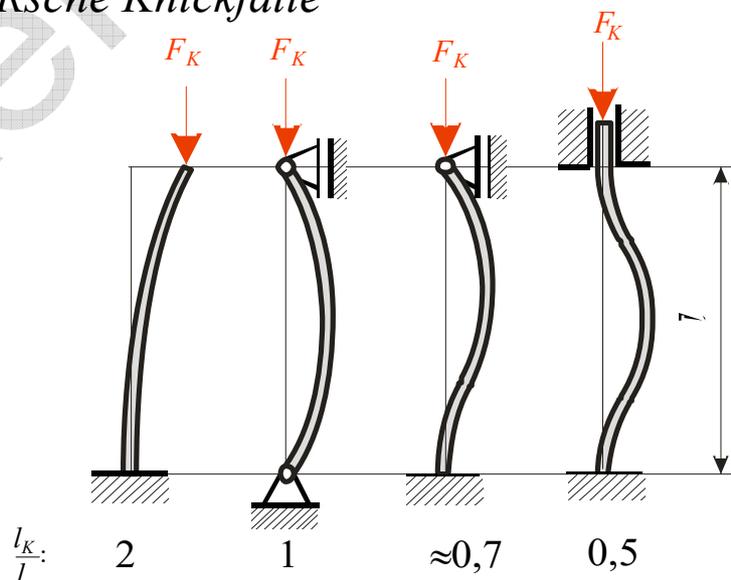
mit: $V = U - W$ Potenzial
 U - im System gespeicherte Energie
 W - Arbeit der am System angreifenden Lasten
 q - Koordinate zur Beschreibung der Verformung

Stabilitätsproblem Knicken

Kritische Kraft für EULERSche Knickfälle

$$F_K = \pi^2 \frac{E I}{l_k^2}$$

(für $\lambda > \lambda_P = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}$)



mit: $\lambda = \frac{l_K}{i}$ Schlankheitsgrad

i - Trägheitsradius [S. 52](#)

σ_P - Proportionalitätsgrenze

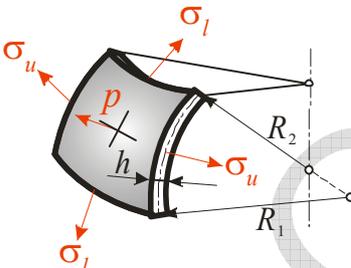
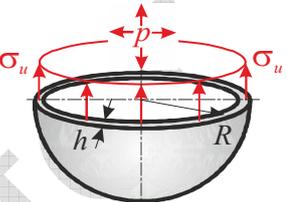
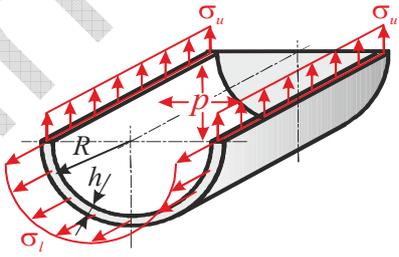
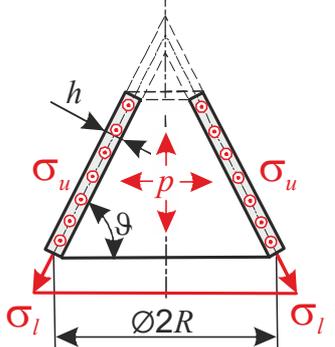
Flächentragwerke

Voraussetzung:

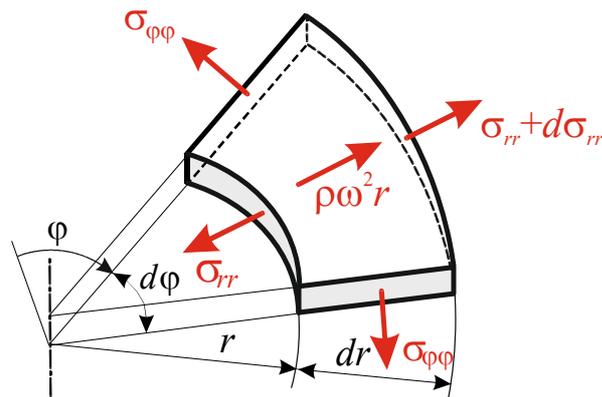
Belastung, Geometrie, Materialverhalten sind rotationssymmetrisch:

→ Spannungs- und Verzerrungszustand ist rotationssymmetrisch

Rotationsschalen (Behälter - Membrantheorie)

Behälter	Längs- spannung	Umfangs- spannung
allgemein 	$\frac{\sigma_l}{R_1} + \frac{\sigma_u}{R_2} = \frac{p}{h}$ ↑: (Rotationsachse)	
Kugelschale 	$\frac{R}{2h} p$	
Zylinder- schale 	$\frac{R}{2h} p$	$\frac{R}{h} p$
Kegelschale 	$\frac{R}{2h \sin \vartheta} p$	$\frac{R}{h \sin \vartheta} p$

Kreis- und Kreisringscheiben



Differentialgleichung

$$u_r'' + \frac{u_r'}{r} - \frac{u_r}{r^2} = \left[\frac{1}{r} (r u_r)' \right]' = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r + (1+\nu) \alpha (\Delta T)'$$

mit: $u_r(r)$ - Verschiebung in radialer Richtung
 ρ - Massendichte
 $\omega = 2\pi n$ Winkelgeschwindigkeit (n – Drehzahl)
 $(\)' = \frac{\partial(\)}{\partial r}$

Allgemeine Lösung

$$u_r = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3 + (1+\nu) \frac{\alpha}{r} \int_a^r \bar{r} \Delta T(\bar{r}) d\bar{r}$$

mit: $a = \begin{cases} 0 & \text{(Vollscheibe)} \\ \text{Innenradius} & \text{(Ringscheibe)} \end{cases}$

C_1, C_2 – Integrationskonstanten aus Randbedingungen

Randbedingungen (je 1 pro Rand) für u_r bzw. σ_{rr}

Spannungen

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{u_r}{r} + u_r' - (1+\nu) \alpha \Delta T \right]$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_r}{r} + \nu u_r' - (1+\nu) \alpha \Delta T \right]$$

Vergleichsspannung nach Gestaltänderungsenergiehypothese [S. 20](#)*Dehnungen*

$$\varepsilon_{rr} = u_r' \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) + \alpha \Delta T$$

Alternative Lösung (günstig bei Spannungs-Randbedingungen)

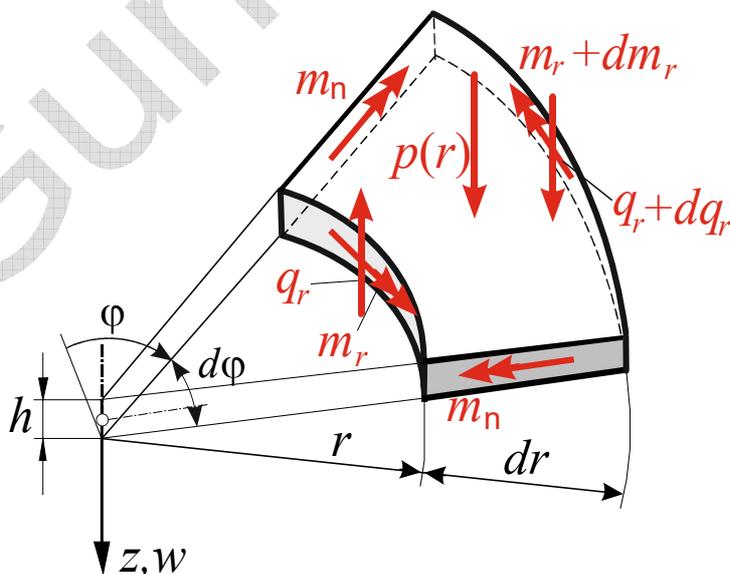
$$u_r = \frac{1-\nu}{E} K_1 r + \frac{1+\nu}{E} K_2 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3 + (1+\nu) \frac{\alpha}{r} \int_a^r \bar{r} \Delta T(\bar{r}) d\bar{r}$$

$$\sigma_{rr} = K_1 - \frac{1}{r^2} K_2 - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 - \frac{E \alpha}{r^2} \int_a^r \bar{r} \Delta T(\bar{r}) d\bar{r}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = K_1 + \frac{1}{r^2} K_2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 - E \alpha \left(\Delta T - \frac{1}{r^2} \int_a^r \bar{r} \Delta T(\bar{r}) d\bar{r} \right)$$

mit: K_1, K_2 – Integrationskonstanten

Dehnungen wie oben

Kreis- und Kreisringplatten

Differenzialgleichung

$$\Delta\Delta w = w'''' + 2 \frac{w'''}{r} - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} = \frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r w')' \right]' \right\}' = \frac{p(r)}{K}$$

mit: $w(r)$ – Verschiebung der Plattenmittelfläche in z -Richtung

$$K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Plattensteifigkeit}$$

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{dr}$$

Allgemeine Lösung für $p(r) = p_0 = \text{konst.}$

$$w = C_1 + C_2 \ln \frac{r}{r_0} + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln \frac{r}{r_0} + \frac{p_0 r^4}{64 K}$$

mit: r_0 – beliebiger Bezugsradius

C_1, \dots, C_4 – Integrationskonstanten aus Randbedingungen

Randbedingungen (je 2 pro Rand) für w oder q_r bzw. w' oder m_r

Schnittgrößen

$$m_r = -K \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) \quad m_\varphi = -K \left(\nu w'' + \frac{w'}{r} \right)$$

$$q_r = -K \left(w'' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} \right)$$

Spannungen

$$\sigma_{rr} = \frac{12 m_r}{h^3} z$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{12 m_\varphi}{h^3} z$$

$$\text{mit: } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

Vergleichsspannung nach Gestaltänderungsenergiehypothese [S. 20](#)

Dehnungen

$$\varepsilon_{rr} = -z w'' \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -z \frac{w'}{r} \quad \varepsilon_{zz} = 0$$

Kinematik

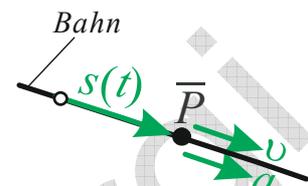
Kinematik des Punktes

Bewegung auf gerader Bahn

Weg	$s = s(t)$
Geschwindigkeit	$v = \dot{s}$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{s}$

mit: $\dot{(\quad)} = \frac{d(\quad)}{dt} = \frac{d(\quad)}{ds} v$

\bar{P} - Punkt auf Bahn



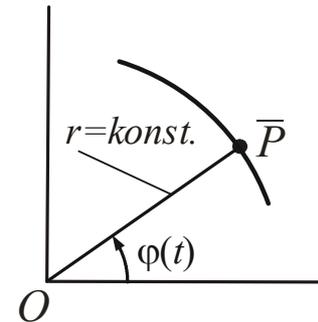
Bewegung auf Kreisbahn

(Dreh-)Winkel	$\varphi = \varphi(t)$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

mit: $\dot{(\quad)} = \frac{d(\quad)}{dt} = \frac{d(\quad)}{d\varphi} \omega$

T - Kreisfrequenz (Umlaufzeit)

n - Drehzahl



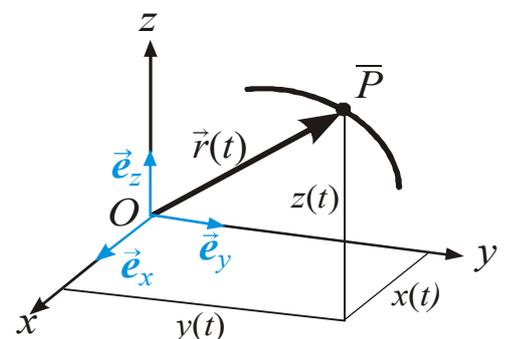
Bewegung auf beliebiger Bahn, verschieden beschrieben

▪ Kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \vec{e}_z$$



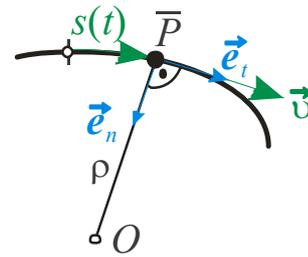
- Natürliche Koordinaten

$$s = s(t)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \vec{e}_t(t) = v(t) \vec{e}_t(t)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t) \vec{e}_t(t) + \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \vec{e}_n(t)$$

mit: ρ - Krümmungsradius

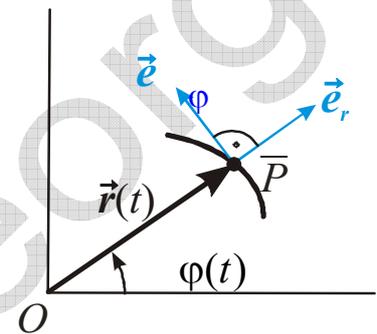


- Polarkoordinaten (ebene Bewegung)

$$\vec{r} = r(t) \vec{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

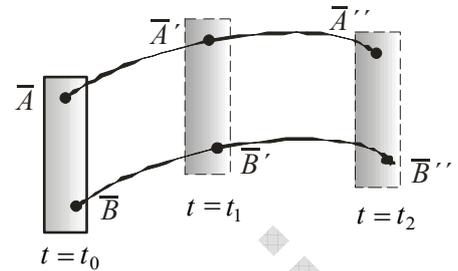
$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + \left(\underbrace{2 \dot{r} \dot{\varphi}}_{\text{CORIOLIS-Beschleunigung}} + r \ddot{\varphi} \right) \vec{e}_\varphi$$



Kinematik des starren Körpers

Translation

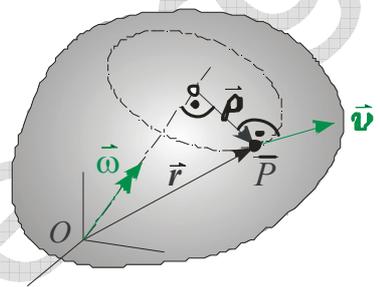
Ein Körperpunkt (\bar{A} bzw. \bar{B}) ist repräsentativ für alle Körperpunkte; Kinematik des Punktes anwendbar



Rotation um raum- und körperfesten Punkt O

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

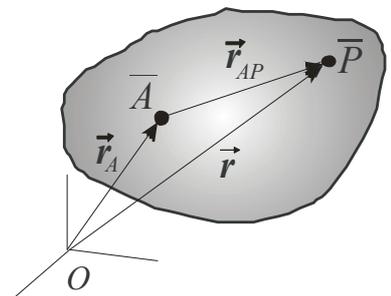


Allgemeine Bewegung

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})$$

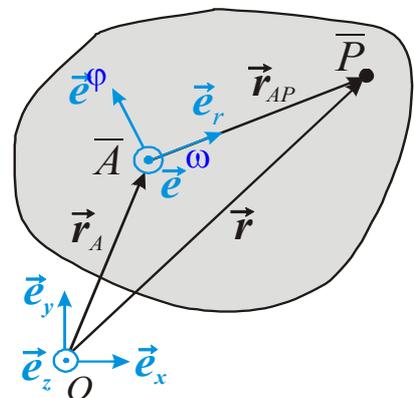


Ebene Bewegung

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \omega \vec{e}_z \times \vec{r}_{AP}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_A + \dot{\omega} \vec{e}_z \times \vec{r}_{AP} - \omega^2 \vec{r}_{AP}$$

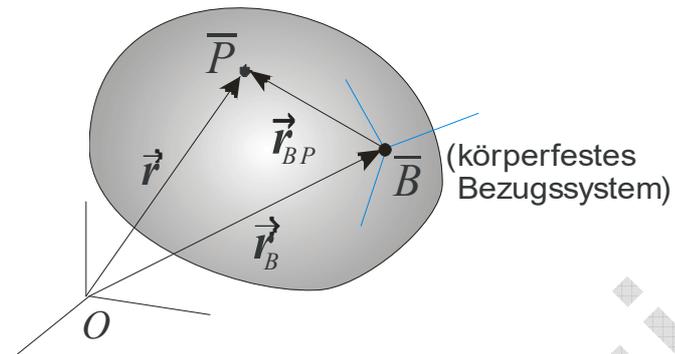


Momentanpol

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \frac{\vec{e}_z \times \vec{v}_A}{\omega}$$

$$\text{mit: } \vec{e}_z \times \vec{v}_A = \dot{x}_A \vec{e}_y - \dot{y}_A \vec{e}_x$$

Bewegung des Punktes \bar{P} relativ zu bewegtem Bezugssystem



$$\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{r}_{BP}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BP} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \underbrace{\ddot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{BP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BP})}_{\text{Führungsbeschleunigung}} + \underbrace{2 \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}}_{\text{CORIOLIS-Beschleunigung}} + \vec{a}_{rel}$$

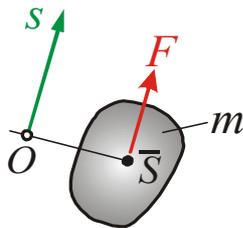
mit: $\vec{\omega}$ - absolute Winkelgeschwindigkeit des bewegten Bezugssystems

Kinetik starrer Körper

Translation

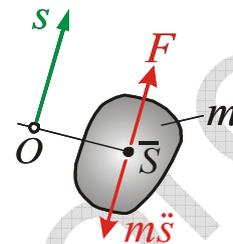
NEWTONs
Bewegungsgleichung

- geradlinige Translation infolge der Kraft F



$$F = m \ddot{s}$$

statische Interpretation
(D' ALEMBERT)



$$\uparrow: F - m \ddot{s} = 0$$

mit: $m \ddot{s}$ - Hilfskraft
(Trägheitskraft)

- beliebige Translation ($\vec{M}_R = 0$)

$$\vec{F}_R = m \ddot{\vec{r}}_S$$

$$\vec{F}_R - m \ddot{\vec{r}}_S = 0$$

Mathematische Folgerungen für beliebige Translation

- $$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_R(t) dt = m (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$

mit: 0, 1 - Indizes für Weganfang bzw. Wegende

Für $\vec{F}_R = 0$ (Impulserhaltung): $\vec{v} = konst.$

- Mechanischer Arbeitssatz (Translation)

$$\int_0^1 \vec{F}_R(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_R(t) \cdot \vec{v}(t) dt = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = T_1 - T_0$$

mit: $P = \vec{F}_R \cdot \vec{v}$ Leistung (bei Translation)

$T = \frac{1}{2} m v^2$ kinetische Energie (der Translation)

- Mechanischer Energiesatz (Translation)

$$\int_0^1 \vec{F}_R(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U_0 - U_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = T_1 - T_0$$

$$U_0 + T_0 = U_1 + T_1 = \text{konst.}$$

mit: \vec{F}_R - Potenzialkraft

U - potenzielle Energie (der Translation)

Beispiele: Gewicht: $U = mgh$ mit: h - Höhe

Federenergie [S. 26](#)

- Mechanischer Leistungssatz (Translation)

$$\vec{F}_R(t) \cdot \vec{v}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t) = \dot{T}$$

Beliebige Bewegung

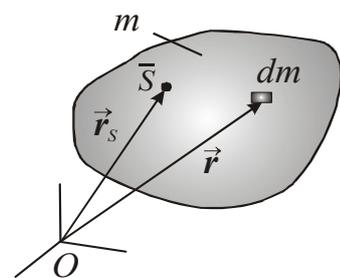
Schwerpunktdefinition

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r} dm$$

folglich:

$$\dot{\vec{r}}_S = \frac{1}{m} \int_{(m)} \dot{\vec{r}} dm$$

Schwerpunktsatz



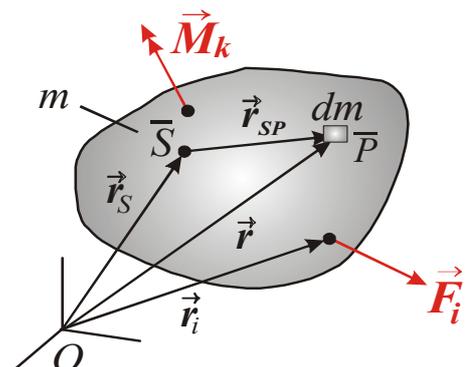
Definition von Impuls und Drehimpuls

- Impuls

$$\vec{p} = \int_{(m)} \dot{\vec{r}} dm = m \dot{\vec{r}}_S$$

- Drehimpuls bezüglich des Punktes O

$$\vec{L} = \int_{(m)} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm$$



EULERS Grundgesetze der Kinetik

- Impulsbilanz $\vec{F}_R = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}_S$
- Drehimpulsbilanz $\vec{M}_R = \dot{\vec{L}}$

Formulierung im x,y,z-Koordinatensystem

- Impulsbilanz

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = m \ddot{x}_S$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = m \ddot{y}_S$$

$$F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = m \ddot{z}_S$$

- Drehimpulsbilanz

bezüglich körperfester Hauptträgheitsachsen $i = 1, 2, 3$ durch den Schwerpunkt \bar{S} (EULERSche Gleichungen)

$$M_{R1} = J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3$$

$$M_{R2} = J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1$$

$$M_{R3} = J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2$$

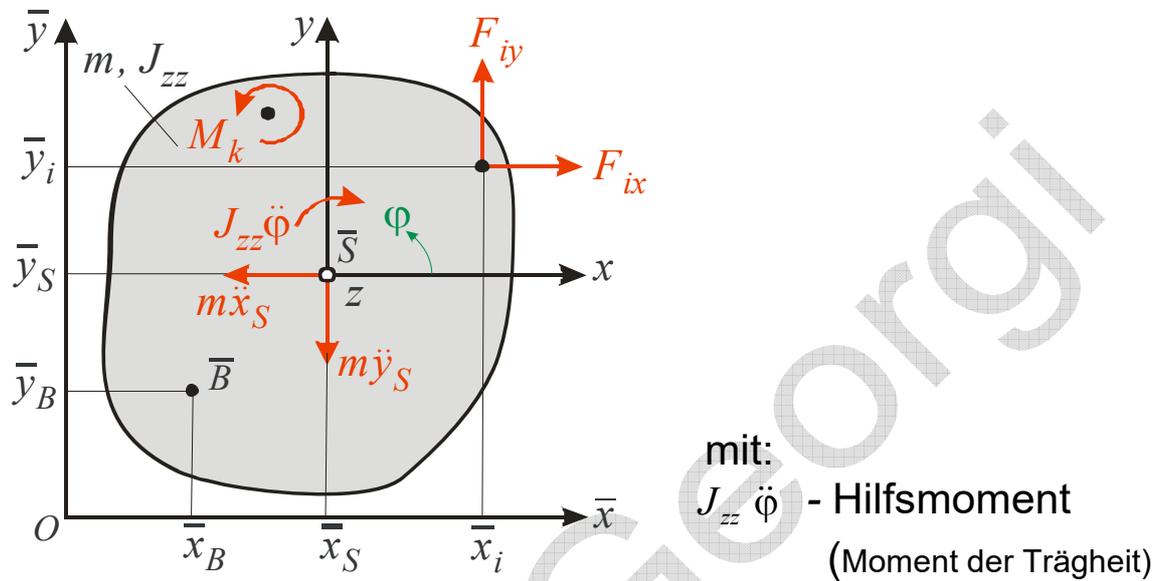
mit: M_{Ri} – Koordinaten des resultierenden Moments

J_i – (Massen-)Hauptträgheitsmomente [S. 54](#)

ω_i – Koordinaten der absoluten Winkelgeschwindigkeit

Bewegung in der x,y -Ebene

Statische Interpretation von Impuls- und Drehimpulsbilanz für verschiedene Bezugspunkte



Kräftegleichgewicht (für alle Bezugspunkte gleich)

$$\rightarrow: \sum_{i=1}^n F_{ix} - m \ddot{x}_S = 0 \quad \uparrow: \sum_{i=1}^n F_{iy} - m \ddot{y}_S = 0$$

Momentengleichgewichte

$$\overset{\curvearrowright}{O}: \sum_{i=1}^n (F_{iy} \bar{x}_i - F_{ix} \bar{y}_i) + \sum_{k=1}^m M_k - m \ddot{y}_S \bar{x}_S + m \ddot{x}_S \bar{y}_S - J_{zz} \ddot{\phi} = 0$$

bzw.

$$\overset{\curvearrowright}{B}: \sum_{i=1}^n [F_{iy} (\bar{x}_i - \bar{x}_B) - F_{ix} (\bar{y}_i - \bar{y}_B)] + \sum_{k=1}^m M_k - m \ddot{y}_S (\bar{x}_S - \bar{x}_B) + m \ddot{x}_S (\bar{y}_S - \bar{y}_B) - J_{zz} \ddot{\phi} = 0$$

bzw.

$$\overset{\curvearrowright}{S}: \sum_{i=1}^n [F_{iy} (\bar{x}_i - \bar{x}_S) - F_{ix} (\bar{y}_i - \bar{y}_S)] + \sum_{k=1}^m M_k - J_{zz} \ddot{\phi} = 0$$

Mechanischer Energiesatz

$$U_0 - U_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{S1}^2 + \dot{y}_{S1}^2) + \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2} m (\dot{x}_{S0}^2 + \dot{y}_{S0}^2) - \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\phi}_0^2 = T_1 - T_0$$

$$U_0 + T_0 = U_1 + T_1 = \text{konst.}$$

Sonderfall: Rotation um raumfeste Achse durch den Punkt A

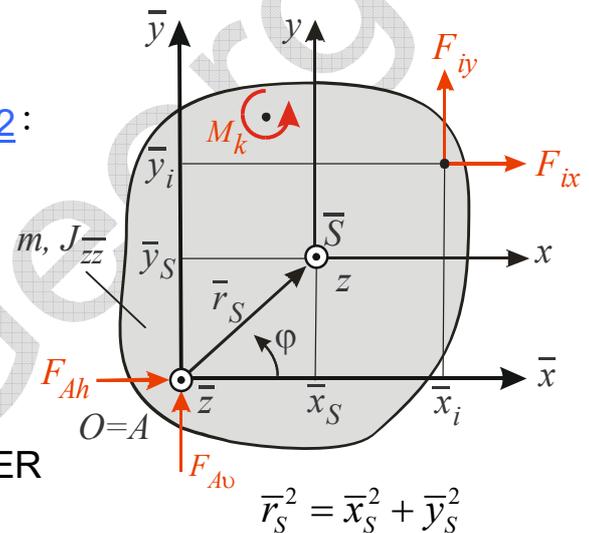
Bewegungsgleichung (analog zur Translation)

$$M_{R\bar{z}} = J_{\bar{z}\bar{z}} \ddot{\phi}$$

$$\text{mit } M_{R\bar{z}} = \sum_{i=1}^n (F_{iy} \bar{x}_i - F_{ix} \bar{y}_i) + \sum_{k=1}^m M_k \quad \text{S. 2:}$$

$$\sum_{i=1}^n (F_{iy} \bar{x}_i - F_{ix} \bar{y}_i) + \sum_{k=1}^m M_k - J_{\bar{z}\bar{z}} \ddot{\phi} = 0$$

$$\text{mit: } J_{\bar{z}\bar{z}} = J_{zz} + \bar{r}_S^2 m \quad \text{Satz von STEINER} \\ \text{S. 54}$$



Mathematische Folgerungen aus der Bewegungsgleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} M_{R\bar{z}}(t) dt = J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\phi}_1 - J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\phi}_0$$

Für $M_{R\bar{z}} = 0$ (Drehimpulserhaltung): $J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\phi} = \text{konst.}$ bzw. $\dot{\phi} = \text{konst.}$

Mechanischer Arbeitssatz (Rotation)

$$\int_{\phi_0}^{\phi_1} M_{R\bar{z}}(\phi) d\phi = \int_{t_0}^{t_1} M_{R\bar{z}}(t) \dot{\phi}(t) dt = \frac{1}{2} J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2} J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\phi}_0^2 = T_1 - T_0$$

mit: $P = M_{R\bar{z}} \dot{\phi}$ Leistung (bei Rotation)

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \text{kinetische Energie (der Rotation)}$$

- Mechanischer Energiesatz (Rotation)

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{R\bar{z}}(\varphi) d\varphi = U_0 - U_1 = \frac{1}{2} J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\varphi}_1^2 - \frac{1}{2} J_{\bar{z}\bar{z}} \dot{\varphi}_0^2$$

$$U_0 + T_0 = U_1 + T_1 = \text{konst.}$$

mit: $M_{R\bar{z}}$ aus Potenzial ableitbar

U - potenzielle Energie (der Rotation)

- Mechanischer Leistungssatz (Rotation)

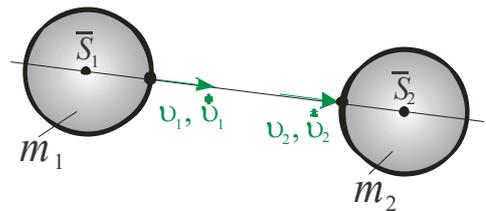
$$\vec{M}_R(t) \cdot \vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i(t) \cdot \vec{\omega}_i(t) = \dot{T}$$

Gerader zentrischer Stoß

Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$v_1^* = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^* = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$



mit: $k = -\frac{v_1^* - v_2^*}{v_1 - v_2}$ Stoßzahl ($k = 1$: elastischer Stoß
 $k = 0$: plastischer Stoß)

v_1, v_2 - Geschwindigkeiten vor dem Stoß

Verlust an kinetischer Energie

$$T - T^* = \frac{1 - k^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \quad l = 1, \dots, f$$

mit: T - kinetische Energie des Gesamtsystems

q_l - verallgemeinerte Koordinate

Q_l - verallgemeinerte Last aus $\delta W = \sum_{l=1}^f Q_l \delta q_l$

δW - Arbeitszuwachs der eingeprägten Lasten

δq_l - virtuelle Verschiebung für konstant gehaltene Zeit

f - reduzierter Freiheitsgrad

Sonderfall: Existenz einer potenziellen Energie U für alle verallgemeinerten Lasten

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad \text{mit: } L = T - U$$

Schwingungen mit dem Freiheitsgrad 1

Anm.: Aufgeführt sind jeweils die Beziehungen für Schwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung.

Ist die Schwingung ungedämpft, dann gilt:

$$b = 0 \quad \delta = 0 \quad D = 0 \quad (\text{Formelzeichen [s. u.](#)})$$

▪ Freie gedämpfte Schwingungen

Bewegungsgleichung

$$m \ddot{s} + b \dot{s} + c s = 0$$

andere Formulierung:

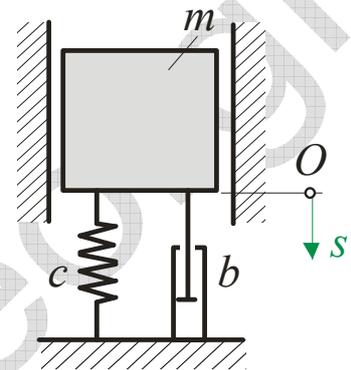
$$\ddot{s} + 2 \delta \dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

mit: b - Dämpfung

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \text{Abklingkonstante}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad \text{Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung}$$

s im raumfesten Koordinatensystem (analog für Winkel)



Lösung für schwache Dämpfung ($\frac{\delta}{\omega_0} = D < 1$)

$$s(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

andere Formulierung:

$$s(t) = e^{-\delta t} C \cos(\omega t - \alpha)$$

mit: C_1, C_2 - Integrationskonstanten aus Anfangsbedingungen:

$$t = 0: \quad s = s_0, \quad \dot{s} = v_0$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{C_2}{C_1} \quad \text{Phasenwinkel}$$

Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

LEHRsches Dämpfungsmaß (Dämpfungsgrad)

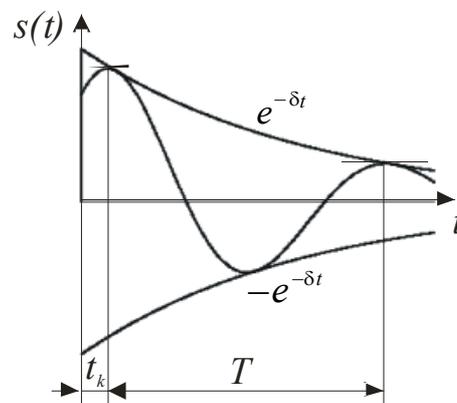
$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2 m \omega_0}$$

Schwingungsdauer

$$T = \frac{2 \pi}{\omega}$$

Logarithmisches Dekrement

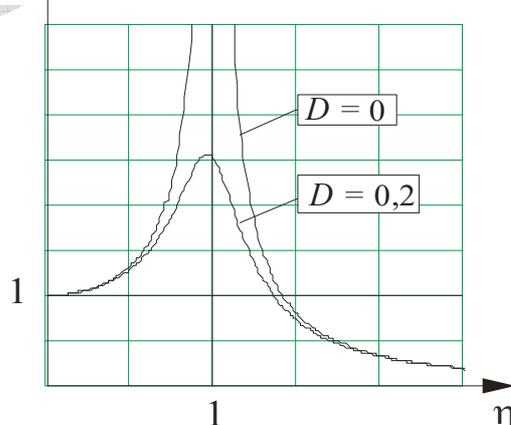
$$\Lambda = \ln \frac{s(t_k)}{s(t_k + T)} = \frac{2 \pi D}{\sqrt{1 - D^2}} = \delta T$$



- Erzwungene gedämpfte Schwingungen

Voraussetzung: Harmonische Erregung

Lasterregung	Unwuchterregung	Bewegungserregung
<p>$F(t) = F_0 \sin \Omega t$</p>		<p>$u = u_0 \sin \Omega t$</p> <p>$s_r = s - u$</p>

Erregungsart	Lasterregung
Erregungsfunktion	$F(t) = F_0 \sin \Omega t$ F_0 - konstante Lastamplitude
Bewegungsgleichung	$m\ddot{s} + b\dot{s} + c s = F_0 \sin \Omega t$
Homogene Lösung	$s = e^{-\delta t} C \cos(\omega t - \alpha)$
Anfangsbedingungen	$t = 0: \quad s = s_0, \quad \dot{s} = v_0$
Partikuläre (stationäre) Lösung	$s_p = \frac{F_0}{c} V_I \sin(\Omega t - \beta)$
Vergrößerungsfunktion	$V_I = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$ $V_{I \max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$ 
Phasenwinkel	$\beta = \arctan \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$
Frequenzverhältnis	$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$
Eigenkreisfrequenz (gedämpft)	$\omega = \omega_0 \sqrt{1-D^2}$
LEHRsches Dämpfungsmaß	$D = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{\delta}{\omega_0}$

Unwuchterregung	Bewegungserregung
$F(t) = m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t$ $m_u r_u \Omega^2$ - konstante Kraftamplitude	$u(t) = u_0 \sin \Omega t$ u_0 - konstante Wegamplitude
$(m+m_u) \ddot{s} + b \dot{s} + c s = m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t$	$m \ddot{s}_r + b \dot{s}_r + c s_r = m u_0 \Omega^2 \sin \Omega t$
$s = e^{-\delta t} C \cos(\omega t - \alpha)$	$s_r = e^{-\delta t} C \cos(\omega t - \alpha)$
$t = 0: \quad s = s_0, \quad \dot{s} = v_0$	$t = 0: \quad s_r = s_{r0}, \quad \dot{s}_r = v_{r0}$
$s_p = \frac{m_u}{m+m_u} r_u V_{II} \sin(\Omega t - \beta)$	$s_{rp} = u_0 V_{III} \sin(\Omega t - \bar{\beta})$
$V_{II} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$ $V_{II \max} = \frac{1}{2D \sqrt{1-D^2}}$	$V_{III} = \frac{\sqrt{1+4D^2 \eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$ $V_{III \max} \approx \frac{1}{2D} \quad \text{für } D \ll 1$
$\beta = \arctan \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$	$\bar{\beta} = \arctan \frac{2D\eta^3}{1-(1-4D^2)\eta^2}$
$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$	
$\omega = \omega_0 \sqrt{1-D^2}$	
$D = \frac{b}{2(m+m_u)\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_0}$	$D = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}}$

Geometrie- und masseabhängige Kennwerte

Schwerpunktskoordinaten

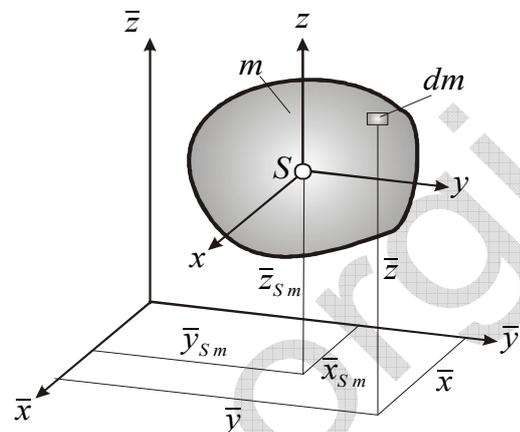
▪ Körper

$$\bar{x}_{S_m} = \frac{1}{m} \int_{(V)} \bar{x} \, dm$$

$$\bar{y}_{S_m} = \frac{1}{m} \int_{(V)} \bar{y} \, dm$$

$$\bar{z}_{S_m} = \frac{1}{m} \int_{(V)} \bar{z} \, dm$$

$$m = \int_{(V)} dm$$



Spezielle Körper

Körper	Schwerpunktskoordinaten
Keil(stumpf) Pyramide(-nstumpf) Quader	$\bar{z}_{S_m} = \frac{h}{2} \frac{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 3a_2 b_2}{2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2}$
Kegel(stumpf) Pyramide(-nstumpf)	$\bar{z}_{S_m} = \frac{h}{4} \frac{r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$ $= \frac{h}{4} \frac{A_1 + 2\sqrt{A_1 A_2} + 3A_2}{A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}$

Bei bekannten Werten für n Teilkörper

$$\bar{x}_{S_m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{x}_{S_{mi}} m_i$$

$$\bar{y}_{S_m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{y}_{S_{mi}} m_i$$

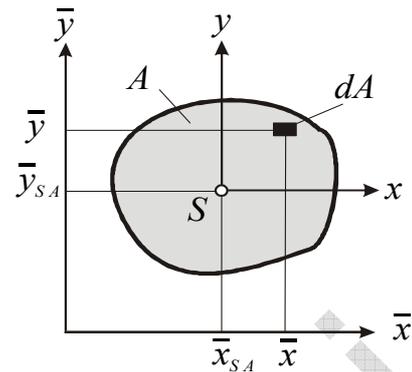
$$\bar{z}_{S_m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{z}_{S_{mi}} m_i \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

■ Ebene Flächen

$$\bar{x}_{S A} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \bar{x} dA = \frac{S_{\bar{y}}}{A}$$

$$\bar{y}_{S A} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \bar{y} dA = \frac{S_{\bar{x}}}{A}$$

$$A = \int_{(A)} dA$$



mit: $S_{\bar{x}}, S_{\bar{y}}$ – Statische Momente (Flächenmomente 1. Ordnung)

Spezielle Flächen

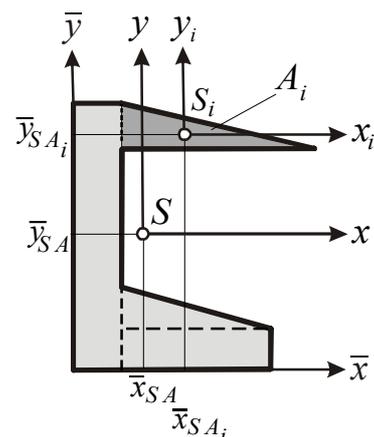
Fläche	Schwerpunktskoordinaten
	$\bar{x}_{S A} = \frac{2}{3} a$ $\bar{y}_{S A} = \frac{1}{3} b$
	$\bar{x}_{S A} = \bar{y}_{S A} = \frac{4}{3\pi} R$

Bei bekannten Werten für n Teilflächen

$$\bar{x}_{S A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{x}_{S A_i} A_i$$

$$\bar{y}_{S A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{y}_{S A_i} A_i$$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

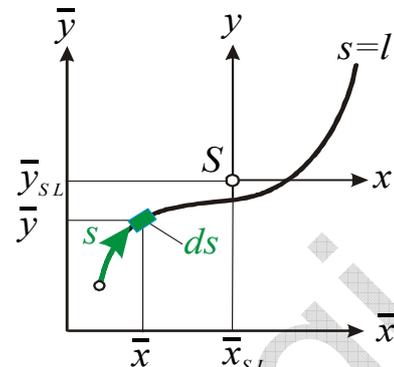


▪ **Ebene Linienstrukturen**

$$\bar{x}_{SL} = \frac{1}{l} \int_{(l)} \bar{x} ds$$

$$\bar{y}_{SL} = \frac{1}{l} \int_{(l)} \bar{y} ds$$

$$l = \int_{(l)} ds$$



Spezielle Linien

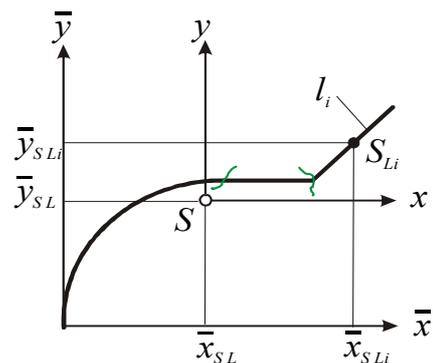
Linie	Schwerpunktskoordinaten
	$\bar{x}_{SL} = \frac{a}{2} = \frac{c}{2} \cos \alpha$ $\bar{y}_{SL} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} \sin \alpha$
	$\bar{x}_{SL} = \bar{y}_{SL} = \frac{2}{\pi} R$

Bei bekannten Werten für n Teillinien

$$\bar{x}_{SL} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n \bar{x}_{SLi} l_i$$

$$\bar{y}_{SL} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n \bar{y}_{SLi} l_i$$

$$l = \sum_{i=1}^n l_i$$



Flächenmomente 2. Ordnung

Definition

Axiale Flächenträgheitsmomente

$$I_{xx} = \int_{(A)} y^2 dA$$

$$I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA$$

Zentrifugal- oder Deviationsmoment

$$I_{xy} = - \int_{(A)} x y dA$$

$$I_{xy} = I_{yx}$$

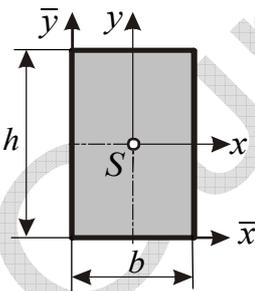
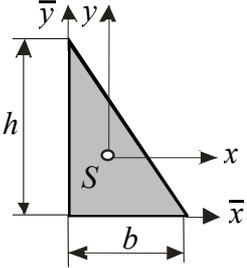
Satz von STEINER

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_S^2 A$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_S^2 A$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} - \bar{x}_S \bar{y}_S A$$

Spezielle Flächen

Fläche	Flächenmomente 2. Ordnung	
	x,y - Koordinatensystem	\bar{x}, \bar{y} -Koordinatensystem
	$I_{xx} = \frac{b h^3}{12}$ $I_{yy} = \frac{h b^3}{12}$ $I_{xy} = 0$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b h^3}{3}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{h b^3}{3}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{b^2 h^2}{4}$
	$I_{xx} = \frac{b h^3}{36}$ $I_{yy} = \frac{h b^3}{36}$ $I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72}$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b h^3}{12}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{h b^3}{12}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{b^2 h^2}{24}$

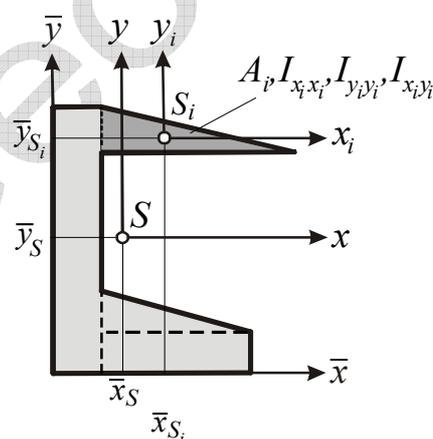
	$I_{xx} = I_{yy} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) R^4$ $I_{xy} = \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) R^4$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\pi}{16} R^4$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{8} R^4$
	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{4} R^4$ $= \frac{\pi}{64} D^4$ $= 0,5 I_p$	

Bei bekannten Werten für n Teilflächen

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i x_i} + \bar{y}_{S_i}^2 A_i)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \sum_{i=1}^n (I_{y_i y_i} + \bar{x}_{S_i}^2 A_i)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} - \bar{x}_{S_i} \bar{y}_{S_i} A_i)$$



Hauptträgheitsmomente $I_1 \geq I_2$

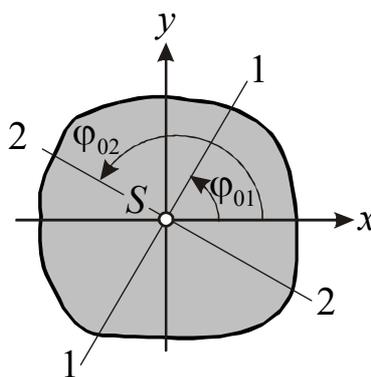
$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

Hauptträgheitsrichtungen

$$\tan 2\varphi_{01,02} = \frac{2 I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

$$\tan \varphi_{01} = \frac{I_{xy}}{I_{xx} - I_2}$$

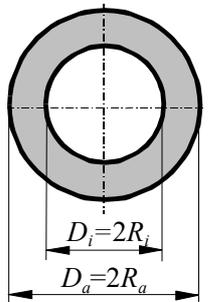
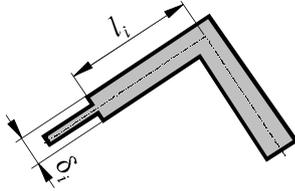
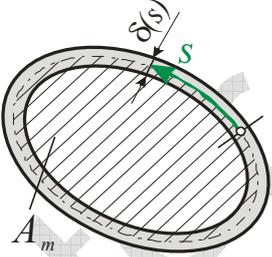
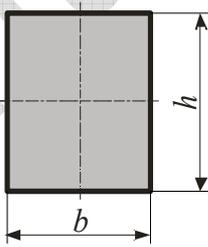
für eindeutige Hauptträgheitsrichtung 1



Trägheitsradius

$$i_k = \sqrt{\frac{I_{kk}}{A}} \quad k = x, y$$

Trägheits- und Widerstandsmomente gegenüber Torsion

Querschnitt	I_t	W_t																		
Kreis ($R_i=0$), Kreisring 	$\frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) =$ $\frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4)$	$\frac{\pi}{2} \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a} =$ $\frac{\pi}{16} \frac{D_a^4 - D_i^4}{D_a}$																		
dünnwandig offen 	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n l_i \delta_i^3$	$\frac{I_t}{\delta_{i \max}}$																		
dünnwandig geschlossen 	$\frac{4 A_m^2}{\oint \frac{1}{\delta(s)} ds}$	$2 A_m \delta_{\min}$																		
Rechteck ($h > b$) 	$c_1 h b^3$	$c_2 h b^2$																		
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>h/b</th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>c_1</td> <td>0,141</td> <td>0,196</td> <td>0,229</td> <td>0,263</td> <td>0,281</td> </tr> <tr> <td>c_2</td> <td>0,208</td> <td>0,231</td> <td>0,246</td> <td>0,267</td> <td>0,282</td> </tr> </tbody> </table>	h/b	1	1,5	2	3	4	c_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	c_2	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	
h/b	1	1,5	2	3	4															
c_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281															
c_2	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282															

Massenmomente 2. Ordnung

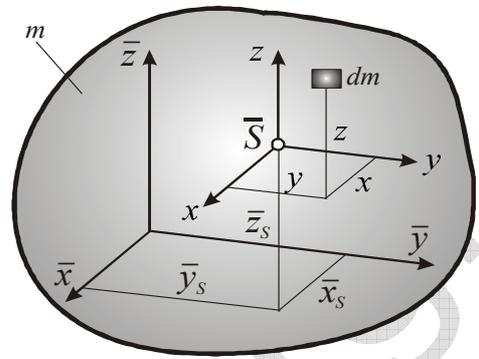
Definition

Axiale Massenträgheitsmomente

$$J_{xx} = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{yy} = \int_{(m)} (z^2 + x^2) dm$$

$$J_{zz} = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$



Zentrifugal- oder Deviationsmomente

$$J_{xy} = - \int_{(m)} x y dm$$

$$J_{xz} = - \int_{(m)} x z dm$$

$$J_{yz} = - \int_{(m)} y z dm$$

$$J_{kl} = J_{lk} \quad k, l = x, y, z$$

Satz von STEINER

$$J_{\bar{x}\bar{x}} = J_{xx} + (\bar{y}_S^2 + \bar{z}_S^2) m$$

$$J_{\bar{y}\bar{y}} = J_{yy} + (\bar{z}_S^2 + \bar{x}_S^2) m$$

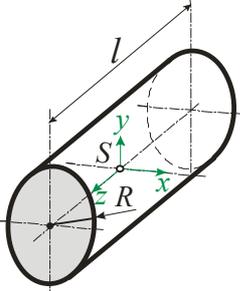
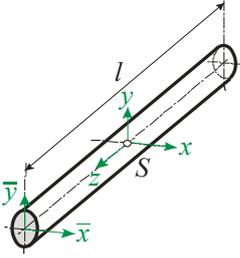
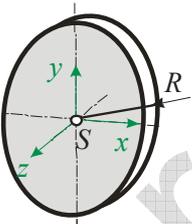
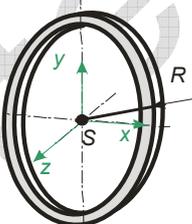
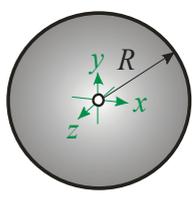
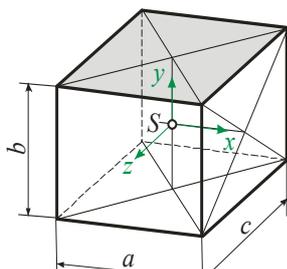
$$J_{\bar{z}\bar{z}} = J_{zz} + (\bar{x}_S^2 + \bar{y}_S^2) m$$

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = J_{xy} - \bar{x}_S \bar{y}_S m$$

$$J_{\bar{x}\bar{z}} = J_{xz} - \bar{x}_S \bar{z}_S m$$

$$J_{\bar{y}\bar{z}} = J_{yz} - \bar{y}_S \bar{z}_S m$$

Spezielle Körper (Masse m)

Körper	Massenmomente 2. Ordnung
Kreiszyylinder 	$J_{xx} = J_{yy} = \frac{m}{12} (3R^2 + l^2) \quad J_{zz} = \frac{m}{2} R^2$
Stab 	$J_{xx} = J_{yy} = \frac{m}{12} l^2$ $J_{zz} = J_{yy} = \frac{m}{3} l^2$
Kreisscheibe 	$J_{zz} = \frac{m}{2} R^2$
Kreisring (dünnere Kreiszyylinder) 	$J_{zz} = m R^2$
Kugel 	$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{5} m R^2$
Quader 	$J_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$ $J_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2)$ $J_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$

Bei bekannten Werten für n Teilkörper

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}\bar{x}} &= \sum_{i=1}^n \left[J_{x_i x_i} + (\bar{y}_{Si}^2 + \bar{z}_{Si}^2) m_i \right] & J_{\bar{x}\bar{y}} &= \sum_{i=1}^n \left(J_{x_i y_i} - \bar{x}_{Si} \bar{y}_{Si} m_i \right) \\ J_{\bar{y}\bar{y}} &= \sum_{i=1}^n \left[J_{y_i y_i} + (\bar{z}_{Si}^2 + \bar{x}_{Si}^2) m_i \right] & J_{\bar{x}\bar{z}} &= \sum_{i=1}^n \left(J_{x_i z_i} - \bar{x}_{Si} \bar{z}_{Si} m_i \right) \\ J_{\bar{z}\bar{z}} &= \sum_{i=1}^n \left[J_{z_i z_i} + (\bar{x}_{Si}^2 + \bar{y}_{Si}^2) m_i \right] & J_{\bar{y}\bar{z}} &= \sum_{i=1}^n \left(J_{y_i z_i} - \bar{y}_{Si} \bar{z}_{Si} m_i \right) \end{aligned}$$

Hauptträgheitsmomente J_i ($i = 1, 2, 3$) aus (vgl. Hauptspannungen S. 14):

$$J_i^3 - S_1 J_i^2 + S_2 J_i - S_3 = 0 \qquad J_1 \geq J_2 \geq J_3$$

mit: $S_1 = J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}$

$$S_2 = J_{xx} J_{yy} + J_{yy} J_{zz} + J_{zz} J_{xx} - J_{xy}^2 - J_{yz}^2 - J_{zx}^2$$

$$S_3 = J_{xx} J_{yy} J_{zz} + 2 J_{xy} J_{yz} J_{zx} - J_{xx} J_{yz}^2 - J_{yy} J_{zx}^2 - J_{zz} J_{xy}^2$$

Hauptträgheitsrichtungen \vec{e}_i aus (vgl. Hauptspannungen S. 14):

$$(J_{xx} - J_i) c_{ix} + J_{xy} c_{iy} + J_{xz} c_{iz} = 0$$

$$J_{yx} c_{ix} + (J_{yy} - J_i) c_{iy} + J_{yz} c_{iz} = 0$$

$$J_{zx} c_{ix} + J_{zy} c_{iy} + (J_{zz} - J_i) c_{iz} = 0$$

mit: $\vec{e}_i = c_{ix} \vec{e}_x + c_{iy} \vec{e}_y + c_{iz} \vec{e}_z$ Einheitsvektor der i -ten Hauptträgheitsrichtung

$$e_i^2 = \sum_{(k)} c_{ik}^2 = 1 \qquad k = x, y, z$$

Trägheitsradius

$$j_k = \sqrt{\frac{J_{kk}}{m}} \qquad k = x, y, z$$

Sonderfall: Zur x,y -Ebene symmetrischer Körper
(vgl. Flächenmomente 2. Ordnung S. 52)

Hauptträgheitsmomente

$$J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad J_1 \geq J_2$$

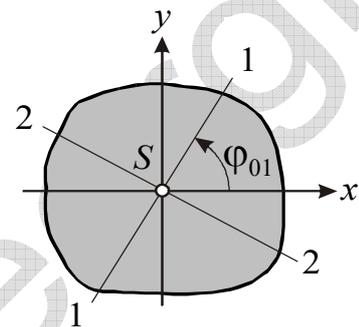
$$J_3 = J_{zz}$$

Hauptträgheitsrichtungen

$$\tan 2\varphi_{01,02} = \frac{2 J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}$$

$$\tan \varphi_{01} = \frac{J_{xy}}{J_{xx} - J_2}$$

für eindeutige Hauptträgheitsrichtung 1



Ergänzungen:

Gunter Georgi

Gunter Georgi

Formelzeichen

- O Koordinatenursprung im raumfesten Koordinatensystem
- Z, z alphanumerisches Zeichen zur Symbolisierung einer physikalischen oder mathematischen Größe
- \vec{z} Vektor bzw. Matrix z
- z' (Orts-)Ableitung der Größe z
- $z_{,x}$ partielle (Orts-)Ableitung der Größe z nach x
- \dot{z} Zeitableitung der Größe z
- \bar{z} parallele Achse zur (durch den Schwerpunkt gehenden) Achse z
- \bar{Z} bewegter Punkt Z im raumfesten Koordinatensystem
- \vec{e}_z z -Komponente des Einheitsvektors \vec{e}

Kombinationen von Symbolen sind möglich.

Die „doppelte“ Symbolik für Vektoren und Matrizen wird benutzt, weil die ausschließlich „fette“ Darstellung in handschriftlichen Aufzeichnungen nicht eindeutig ist.

Farbsymbolik im Text

- [S. Z](#) Verweis auf Seite Z (in gedruckter Version)
Hyperlink zu Seite Z (in elektronischer Version)

Farbsymbolik in den Skizzen

Einheitsvektoren
Lasten, Schnittgrößen, Spannungen, Drücke
Koordinaten, Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen

Stoffauswahl, didaktisch-methodische Aufbereitung, Layout, Satz und Druck:

apl. Doz. Dr.-Ing. habil. G. Georgi

e-Mail: w311@online.de

Vorschläge für Berichtigungen und Ergänzungen an obige e-Mail-Adresse werden gern entgegengenommen.