● Sie mussten die Gleichung

$$I_1 I_2 = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}{}^2$$

nach

$$I_2 = \frac{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}{}^2}{I_1}$$

auflösen und dieses Ergebnis in die Gleichung

$$I_1 + I_2 = I_{xx} + I_{yy}$$

einsetzen.
Es ergibt sich dann:

$$I_1 + \frac{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}{}^2}{I_1} = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_1^2 - \left(I_{xx} + I_{yy}\right) I_1 + I_{xx} I_{yy} - I_{xy}{}^2 = 0 \quad .$$

Das ist eine Bestimmungsgleichung zweiten Grades für I_1 mit den Lösungen:

$$\begin{aligned} I_{11,12} &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{xx} + I_{yy}\right)^2}{4} - I_{xx} I_{yy} + I_{xy}{}^2} \\ &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}{4} + I_{xy}{}^2} \quad . \end{aligned}$$

Für I_2 ergeben sich die gleichen Lösungen I_{21}, I_{22}.
Damit erhalten wir die Hauptträgheitsmomente endgültig zu:

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}{4} + I_{xy}{}^2} \quad .$$

Durch diese Elimination ging allerdings die eindeutige Zuordnung von φ_0 zu I_1 und $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ zu I_2 verloren. Man weiß aber erfahrungsgemäß, dass das größere Hauptträgheitsmoment stets zu der Achse gehört, die senkrecht zur Richtung der größeren Flächenausdehnung zeigt.

! Wie lauten die Trägheitsmomente bezüglich eines gegen das x, y-System um den Winkel φ gedrehten ξ, η-Koordinatensystems, wenn die x, y-Achsen Hauptträgheitsachsen sind?

Ihre Lösung können Sie anschließend auf Seite 168 vergleichen.

168