1 Definition der Trägheits- und Zentrifugalmomente von Flächen

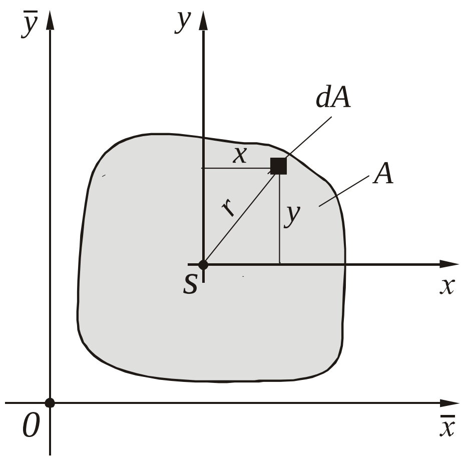


Abb.1

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Definition</th><th>Größe</th><th>Maßeinheit</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Momente zweiter Ordnung (Komponenten des Trägheitstensors)</td><td rowspan="2">Flächenträgheitsmomente (axiale Trägheitsmomente)</td><td>$I_{xx} = \int_{(A)} y^2 \, dA$</td><td rowspan="2">$> 0$</td><td rowspan="3">cm^4, mm^4</td></tr>
<tr><td>$I_{yy} = \int_{(A)} x^2 \, dA$</td></tr>
<tr><td>Zentrifugalmoment (Deviationsmoment)</td><td>$I_{xy} = -\int_{(A)} xy \, dA$</td><td>>0; 0; <0</td></tr>
</table>

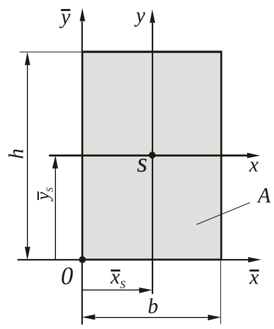
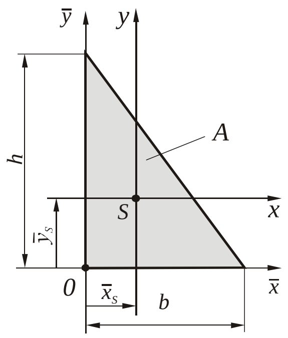
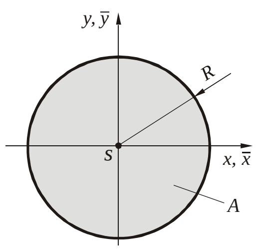
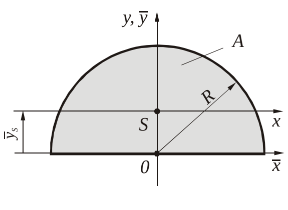
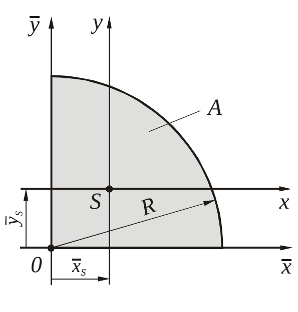
Das Zentrifugalmoment verschwindet, wenn der Querschnitt zu mindestens einer Koordinatenachse symmetrisch ist.
Bezüglich des Koordinatensystems mit dem Ursprung im Punkt 0 ($\bar{x}, \bar{y}$ -System) gelten die analogen Definitionen.

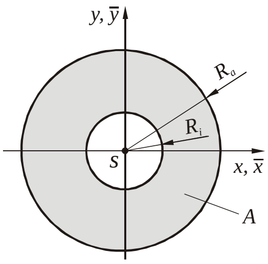
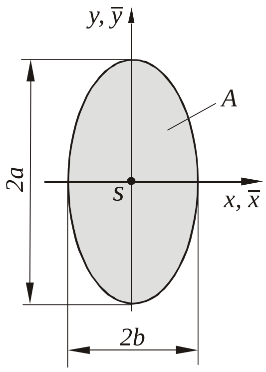
Zusammenhang zwischen polarem Trägheitsmoment und axialen Flächenträgheitsmomenten:

Allgemein: $I_p = I_{xx} + I_{yy}$ mit: $I_p = \int_{(A)} r^2 dA$

$I_{xx} = I_{yy}$: $I_p = 2\, I_{xx} = 2\, I_{yy}$

2 Momente zweiter Ordnung für einfache Querschnitte

Querschnitt	Schwerpunkts-koordinaten	Momente zweiter Ordnung	
		$\bar{x},\bar{y}$-System	x, y-System
	$\bar{x}_S = \frac{b}{2}$ $\bar{y}_S = \frac{h}{2}$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b\,h^3}{3}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{b^3 h}{3}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{b^2 h^2}{4}$	$I_{xx} = \frac{b\,h^3}{12}$ $I_{yy} = \frac{b^3 h}{12}$ $I_{xy} = 0$
	$\bar{x}_S = \frac{b}{3}$ $\bar{y}_S = \frac{h}{3}$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{b\,h^3}{12}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{b^3 h}{12}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{b^2 h^2}{24}$	$I_{xx} = \frac{b\,h^3}{36}$ $I_{yy} = \frac{b^3 h}{36}$ $I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72}$
	$\bar{x}_S = \bar{y}_S = 0$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} = 0$	$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}}$ $I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}}$ $I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}}$
	$\bar{x}_S = 0$ $\bar{y}_S = \frac{4R}{3\pi}$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} = 0$	$I_{xx} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4$ $I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}}$ $I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}}$
	$\bar{x}_S = \bar{y}_S = \frac{4R}{3\pi}$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\pi R^4}{16}$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\pi R^4}{16}$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{R^4}{8}$	$I_{xx} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) R^4$ $I_{yy} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) R^4$ $I_{xy} = \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right) R^4$

	$\bar{x}_S = \bar{y}_S = 0$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} = \frac{\pi}{4}\left(R_a^4 - R_i^4\right)$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} = \frac{\pi}{4}\left(R_a^4 - R_i^4\right)$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} = 0$	$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}}$ $I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}}$ $I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}}$
	$\bar{x}_S = \bar{y}_S = 0$	$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} = \frac{\pi}{4} a^3 b$ $I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} = \frac{\pi}{4} a b^3$ $I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} = 0$	$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}}$ $I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}}$ $I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}}$

3 Der Satz von STEINER

Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von STEINER:

Das *x*, *y*-Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Schwerpunkt des Querschnitts;
Die Achsen des $\bar{x}, \bar{y}$-Koordinatensystems sind zu den entsprechenden des *x*, *y*-Koordinatensystems paarweise parallel.

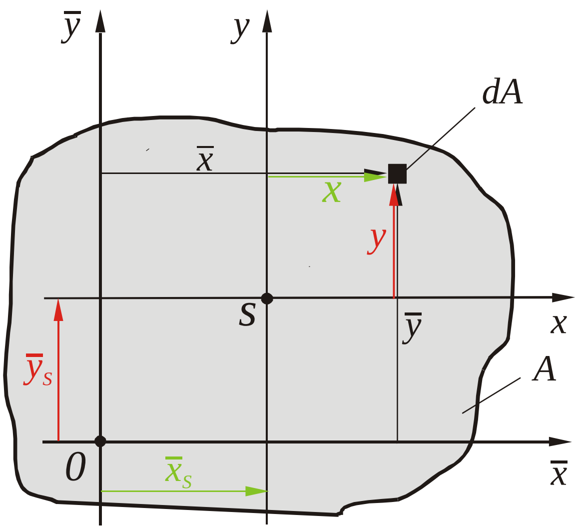


Abb. 2

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_S^2 A$$
$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{x}_S^2 A$$
$$J_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_S \bar{y}_S A$$

4 Berechnung der Momente zweiter Ordnung für zusammengesetzte Querschnitte

Besteht die Gesamtfläche aus mehreren Teilflächen, deren Momente zweiter Ordnung bekannt sind, dann errechnen sich die Momente zweiter Ordnung für die Gesamtfläche aus der Summe der Momente zweiter Ordnung der einzelnen Teilflächen.

Voraussetzung:

Die Momente zweiter Ordnung der Teilflächen sind auf *dasselbe* Koordinatensystem bezogen.

Anmerkung:

Ausschnitte werden als Flächen mit "negativem" Flächeninhalt behandelt.

Schrittfolge bei der Berechnung der Momente zweiter Ordnung für zusammengesetzte Flächen:

1. Zerlegung der Fläche mit dem Flächeninhalt A in n Teilflächen mit den Flächeninhalten A_i

2. Wahl eines $\overline{x},\overline{y}$-Koordinatensystems
(Für dieses Koordinatensystem müssen sich möglichst alle Momente zweiter Ordnung für möglichst alle Teilflächen angeben lassen. - Das $\overline{x},\overline{y}$-System kann auch mit dem x,y-System zusammenfallen.)

3. Ermittlung der Schwerpunktskoordinaten der Gesamtfläche $(\overline{x}_S, \overline{y}_S)$

   3.1 Ermittlung der Schwerpunktsabstände der Teilflächen in Bezug auf das $\overline{x},\overline{y}$-System $(\overline{x}_{Si}, \overline{y}_{Si})$
   3.2 Ermittlung der Flächeninhalte der Teilflächen (A_i)
   3.3 Ermittlung von $\overline{x}_S$ und $\overline{y}_S$ nach:

$$\overline{x}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$\overline{y}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{y}_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

4. Ermittlung der Momente zweiter Ordnung für die Teilflächen in Bezug auf ihren Schwerpunkt $(I_{xxi}, I_{yyi}, I_{xyi})$

5. Ermittlung der Momente zweiter Ordnung für die Teilflächen in Bezug auf das $\overline{x},\overline{y}$-System $(I_{\overline{xx}i}, I_{\overline{yy}i}, I_{\overline{xy}i})$ mit Hilfe des Satzes von STEINER

6. Ermittlung der Momente zweiter Ordnung für die Gesamtfläche in Bezug auf das $\overline{x},\overline{y}$-System $(I_{\overline{xx}}, I_{\overline{yy}}, I_{\overline{xy}})$ durch Summation der gleichen Größen für die Teilflächen

(Sind beide Koordinatensystem kongruent, dann gilt:

$$I_{xx} = I_{\overline{xx}};$$
$$I_{yy} = I_{\overline{yy}};$$
$$I_{xy} = I_{\overline{xx}} \quad .)$$

[7. Ermittlung der Momente zweiter Ordnung für die Gesamtfläche in Bezug auf das x, y-System nach dem Satz von STEINER (I_{xx}, I_{yy}, I_{xy})]

Hinweis:

Die eingeklammerten Schritte können bei bestimmten Querschnittsflächen teilweise oder völlig überflüssig werden.

Tabelle zur Berechnung der Momente zweiter Ordnung für zusammengesetzte Flächen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Teilfläche	$\bar{x}_{Si}$	$\bar{y}_{Si}$	A_i	$\bar{x}_{Si}A_i$	$\bar{y}_{Si}A_i$	I_{xxi}	I_{yyi}	I_{xyi}	$\bar{y}_{Si}^2 A_i$	$\bar{x}_{Si}^2 A_i$	$-\bar{x}_{Si}\bar{y}_{Si}A_i$	$I_{\bar{x}\bar{x}i}$	$I_{\bar{y}\bar{y}i}$	$I_{\bar{x}\bar{y}i}$
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
$\sum$			0	0	0							0	0	0

$$\bar{x}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} =$$

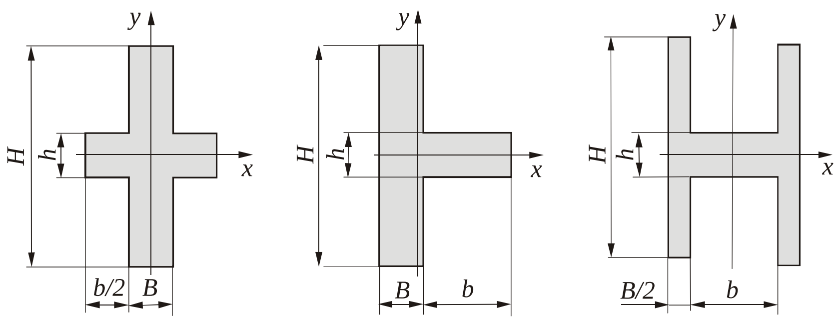
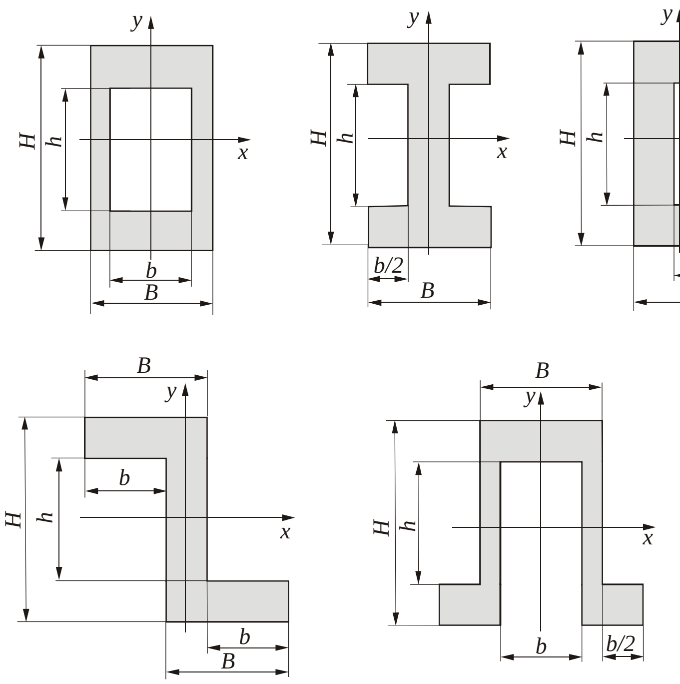
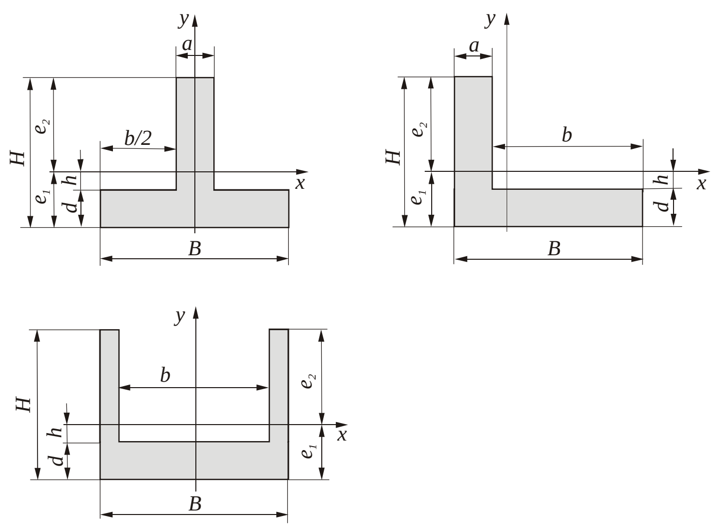
$$\bar{y}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} =$$

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_S^2 A =$$

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_S^2 A =$$

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}_S \bar{y}_S A =$$

Axiale Trägheitsmomente häufig auftretender zusammengesetzter Querschnitte:

<table>
<tr><th>Querschnitt</th><th>I_{xx}, e_1, e_2</th></tr>
<tr><td></td><td>$$I_{xx} = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>$$I_{xx} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>$$I_{xx} = \frac{1}{3}\left(Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3\right)$$ $$e_1 = \frac{1}{2}\frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd}$$ $$e_2 = H - e_1$$</td></tr>
</table>

5 Trägheits- und Zentrifugalmomente bei Drehung des Koordinatensystems in der Querschnittsebene

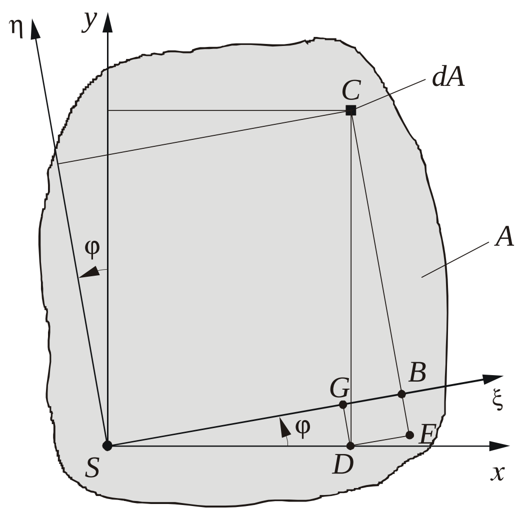


Abb. 3

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + 2 I_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - 2 I_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$I_{\xi\eta} = -\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi \quad .$$

Invarianten des Trägheitstensors:

$$I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta} = I_{xx} + I_{yy} = I_p ;$$

$$I_{\xi\xi} I_{\eta\eta} - I_{\xi\eta}{}^2 = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}{}^2$$

6 Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente, konjugierte Achsen

Hauptträgheitsachsen (1,2) - Achsen, für die

- das Zentrifugalmoment verschwindet;
- die Flächenträgheitsmomente Extremwerte annehmen.

Richtung der orthogonalen Hauptträgheitsachsen:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

Anmerkung:
Symmetrieachsen der Fläche sind immer Hauptträgheitsachsen!

Hauptträgheitsmomente (I_1, I_2 **)** - Extremwerte der Flächenträgheitsmomente:

$$I_1 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 + I_{xy}\sin 2\varphi_0;$$

$$I_2 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi_0 - I_{xy}\sin 2\varphi_0$$

oder:

$$I_{1,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}{4} + I_{xy}{}^2}$$

(Das größere Trägheitsmoment gehört zu der Achse, die senkrecht zur Richtung der größeren Flächenausdehnung steht.)

Momente zweiter Ordnung bezüglich eines gegen das x, y-System um den Winkel φ **gedrehten Koordinatensystems** ξ, η, für den Fall, dass die Achsen x, y Hauptträgheitsachsen sind:

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\varphi;$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\varphi;$$

$$I_{\xi\eta} = -\frac{I_1 - I_2}{2}\sin 2\varphi$$

Das **extremale Zentrifugalmoment** tritt unter einem Winkel von 45° gegenüber den Hauptträgheitsachsen auf:

$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2I_{xy}} = -\frac{1}{\tan 2\varphi_0} = -\cot 2\varphi_0$$

Konjugierte Achsen - Achsen, für die das Zentrifugalmoment verschwindet.

Folgerung:
Hauptträgheitsachsen sind auch konjugierte Achsen

7 Grafische Ermittlung der Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente

Gegeben: I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}

Gesucht: Richtung der Hauptträgheitsachsen

Hauptträgheitsmomente

$I_{\xi\xi}, I_{\eta\eta}, I_{\xi\eta}$

Lösung: s. Abb. 4 bzw. Abb. 5

7.1 Trägheitskreis nach MOHR

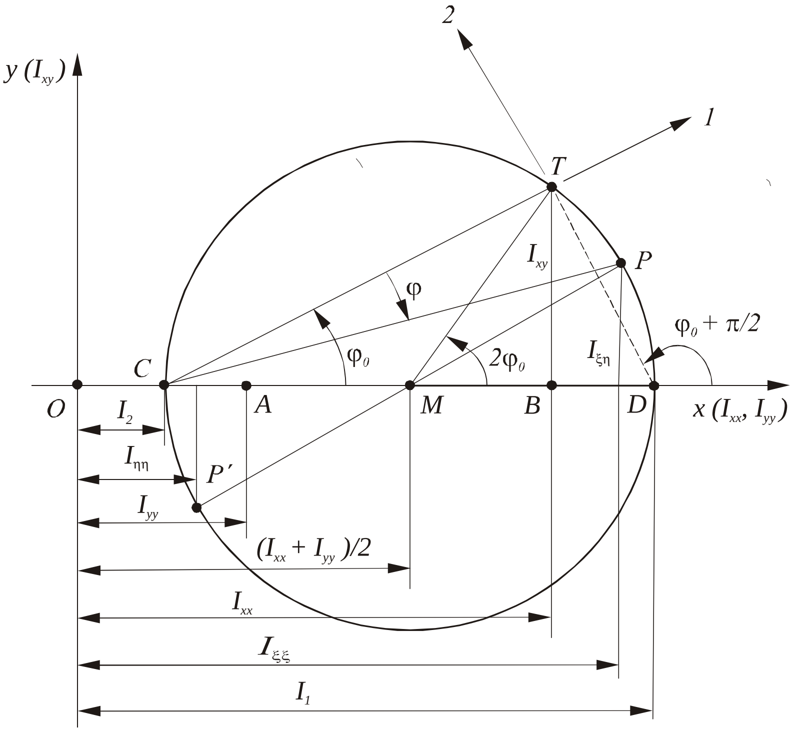


Abb. 4

7.2 Trägheitskreis nach MOHR-LAND

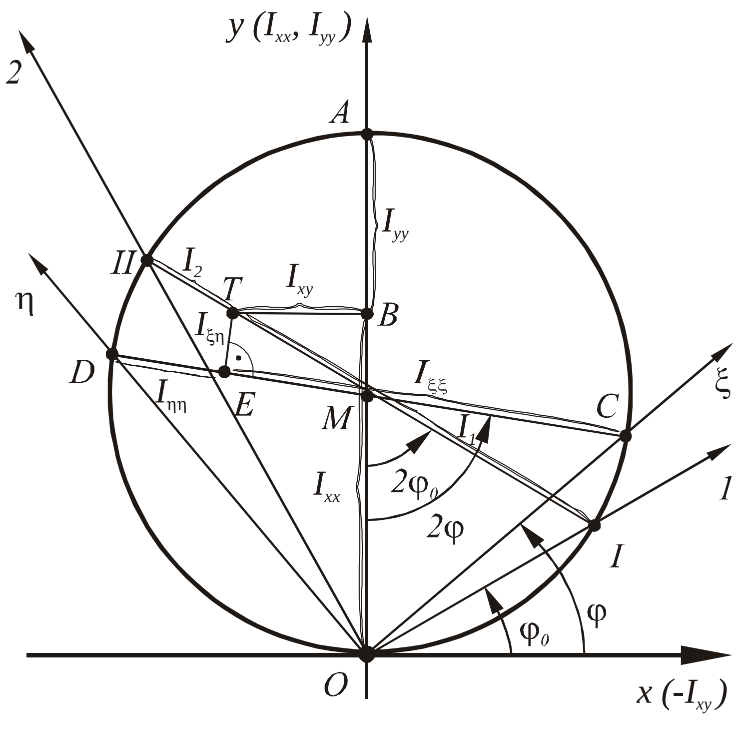


Abb. 5

8 Trägheitsradius und Trägheitsellipse

Trägheitsradius:
Allgemein:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad .$$

für die Achsen x und y:

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}} \; ;$$

$$i_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \quad .$$

für die Hauptträgheitsachsen:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \; ;$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \quad .$$

Trägheitsellipse:

Anwendung:
Gegeben: I_1, I_2, A (bzw. i_1, i_2)
Gesucht: $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$ (bzw. $i_{\xi\xi}$, $i_{\eta\eta}$)
Lösung:

$$i_{\xi\xi} = \sqrt{\frac{I_{\xi\xi}}{A}} = \overline{OD}$$

$$i_{\eta\eta} = \sqrt{\frac{I_{\eta\eta}}{A}} = \overline{OE}$$

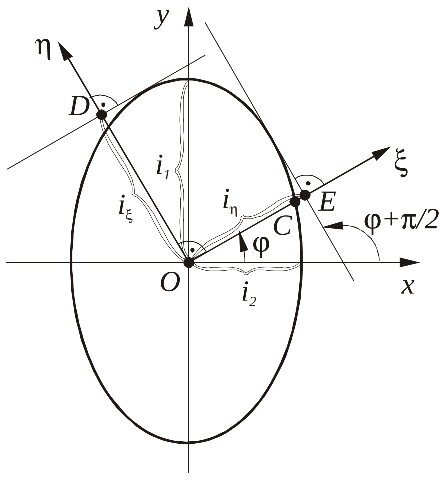


Abb. 6

$$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1$$