- Das Flächenelement dA berechnet sich zu:

$$dA = \bar{r}\, d\bar{r}\, d\varphi \,.$$

(Hatten Sie eine andere Lösung, dann beweisen Sie, warum nur die obige richtig sein kann!)

Diese Darstellung des Flächenelements verwendet man vorteilhaft bei allen Flächen, die durch Teile von Kreisen begrenzt werden.
Mit dieser Darstellung des Flächenelements sind wir aber von den kartesischen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ zu den Polarkoordinaten $\bar{r}, \varphi$ übergegangen. Die Transformationsbeziehungen zwischen $\bar{x}, \bar{y}$ und $\bar{r}$, φ lauten bekanntlich (Abb. 6):

$$\bar{x} = \bar{r}\cos\varphi \quad ;$$
$$\bar{y} = \bar{r}\sin\varphi \quad .$$

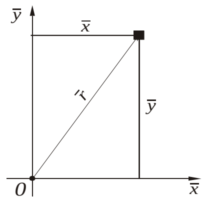

Abb. 6

Ehe wir das Integral in Polarkoordinaten angeben können, müssen wir noch die Grenzen für die Variablen r und φ finden. Diese ergeben sich aus:

$$0 \le \bar{r} \le R \quad ;$$
$$-\alpha \le \varphi \le \alpha \quad .$$

Für $I_{\bar{x}\bar{x}}$ erhalten wir dann das Integral:

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{\bar{r}=0}^{R}(\bar{r}\sin\varphi)^2\,\bar{r}\,d\bar{r}\right]d\varphi = \int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{\bar{r}=0}^{R}\bar{r}^3\sin^2\varphi\,d\bar{r}\right]d\varphi$$
$$= \frac{R^4}{4}\int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\sin^2\varphi\,d\varphi \quad .$$

Auf das letzte Integral wenden wir das Additionstheorem

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

an und bekommen:

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{R^4}{4}\,\frac{1}{2}\int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$\underline{I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{R^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)} \quad .$$

! Berechnen Sie selbständig das Integral $I_{\bar{y}\bar{y}}$! Benutzen Sie zur Lösung das Additionstheorem

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi) \quad !$$