2.3 Reine Torsion

2.3.1 Offene Querschnitte

Unter der Voraussetzung $\vartheta = \varphi' = \text{konst.}$ wird auch die Dehnung ε_{zz} nach (3.12) gleich null. Die nicht verschwindenden **Verzerrungen** sind (mit (3.17a)):

$$\gamma_{xz} = -\left(y + \omega_{,x}\right)\varphi'(z) = -\left(y - y_D + \omega_{D,x}\right)\vartheta$$
$$\gamma_{yz} = \left(x - \omega_{,y}\right)\varphi'(z) = \left(x - x_D - \omega_{D,y}\right)\vartheta$$

Spannungen:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = -\left(y - y_D + \omega_{D,x}\right)\vartheta G \tag{3.18}$$
$$\tau_{yz} = \left(x - x_D - \omega_{D,y}\right)\vartheta G$$

Gleichgewichtsbedingungen
am Volumenelement ((1.3) S. 7 - ohne Volumenkräfte):

$$\tau_{xz,z} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y)$$
$$\tau_{yz,z} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y)$$
$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0$$

Damit stehen für die drei Größen $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \omega_D$ folgende drei Gleichungen zur Verfügung:

$$\tau_{xz} = -\left[y - y_D + \omega_{D,x}\right]\vartheta G$$
$$\tau_{yz} = \left[x - x_D - \omega_{D,y}\right]\vartheta G$$
$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0 \qquad .$$

Das Gleichungssystem wird über die Benutzung einer **Spannungsfunktion** $\Phi(x,y)$ gelöst.

Die Ansätze

$$\tau_{xz}(x,y) = +2\,G\,\vartheta\,\Phi_{,y}(x,y) \tag{3.19}$$
$$\tau_{yz}(x,y) = -2\,G\,\vartheta\,\Phi_{,x}(x,y)$$

erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen und formulieren die Ableitungen der Spannungen mit (3.18) zu:

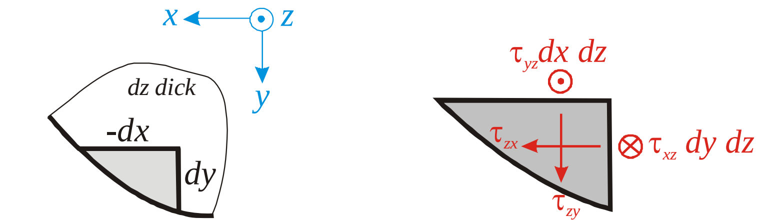
$$\tau_{xz,y} = 2G\vartheta\Phi_{,yy} = \left(-1 - \omega_{D,xy}\right)\vartheta G$$
$$-\tau_{yz,x} = 2G\vartheta\Phi_{,xx} = \left(-1 + \omega_{D,xy}\right)\vartheta G \qquad .$$

Die Addition beider Gleichungen führt auf die **POISSONsche Differenzialgleichung** (Simeon Denise Poisson, 1781-1840):

$$\Delta\Phi(x,y) = -1 \qquad . \tag{3.20}$$

Sie ist die allgemeine Dgl. für das Problem (s. B/1.1 AIRYsche Spannungsfunktion).

Bei der Lösung des Problems ist die **Randbedingung** zu erfüllen, dass die Mantelfläche des Torsionsstabes kräftefrei ist:



$$\odot: \qquad \tau_{yz}\, dx\, dz - \tau_{xz}\, dy\, dz = 0 \quad ,$$

mit der Spannungsfunktion (3.19):

$$\Phi_{,y}\, dy + \Phi_{,x}\, dx = d\Phi = 0$$

$$\Phi(\mathrm{Rand}) = \text{konst.}$$

$\Phi(\mathrm{Rand})$ wird gleich null gesetzt, da die Spannungen nur aus Ableitungen der Funktion Φ gebildet werden.

Die **Lösung der Dgl.** $\Delta\Phi(x,y) = -1$ setzt sich aus dem homogenen Φ_h und dem partiellen Teil Φ_p zusammen:
Φ_h kann aus dem Katalog (s. B/1.1 AIRYsche Spannungsfunktion) entnommen werden.

Für Φ_p wird der Ansatz

$$\Phi_p = C\left(x^2 + y^2\right)$$

gewählt.

Die Konstante C wird über die Dgl. zu

$$C = -\frac{1}{4}$$

bestimmt.

Damit lautet die **vollständige Lösung** der Dgl:

$$\Phi = \Phi_h - \frac{x^2 + y^2}{4} \qquad . \tag{3.21}$$

Um die aus der Grundlagenmechanik bekannte Beziehung

$$\vartheta = \frac{M_t}{G\,I_t} \tag{3.22}$$

weiterhin verwenden zu können, wird das **Torsionsträgheitsmoment** I_t bereitgestellt.

Es wird über eine Äquivalenzbetrachtung (Moment um Stabachse) gewonnen (s. (1.9), S. 9):

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{(A)} (\tau_{yz}\, x - \tau_{xz}\, y)\, dA \\ &= -2\,G\,\vartheta \int_{(A)} (\Phi_{,x}\, x + \Phi_{,y}\, y)\, dx\, dy \\ &= -2\,G\,\vartheta \left\{ \int_{(x)} \left[\int_{(y)} \Phi_{,y}\, y\, dy \right] dx + \int_{(y)} \left[\int_{(x)} \Phi_{,x}\, x\, dx \right] dy \right\} \end{aligned}$$

Nach partieller Integration erhält man:

$$M_t = -2\,G\,\vartheta \left\{ \int_{(x)} \left[y\,\Phi \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} - \int_{(y)} \Phi\, dy \right] dx + \int_{(y)} \left[x\,\Phi \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} - \int_{(x)} \Phi\, dx \right] dy \right\} \quad .$$

Wegen $\Phi(\mathrm{Rand}) = 0$, folgt:

$$x\,\Phi \Big|_{x_1}^{x_2} = y\,\Phi \Big|_{y_1}^{y_2} = 0$$

und endlich:

$$M_t = 4\,G\,\vartheta \int_{(A)} \Phi\, dA \quad .$$

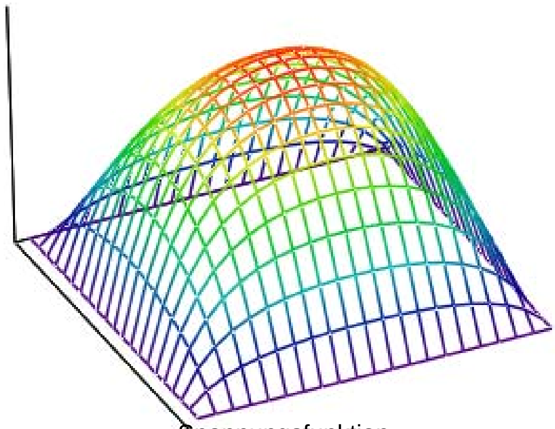
Damit wird das Torsionsträgheitsmoment:

$$I_t = 4 \int_{(A)} \Phi\, dA \quad . \tag{3.23}$$

Wird die vorgestellte Theorie auf einen beliebigen **Rechteckquerschnitt** der Breite b und der Höhe h $(b < h)$ angewandt, dann folgt die Spannungsfunktion (o. B.) zu:

$$\Phi(x,y) = \frac{4b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\,\pi\,y}{b}}{\cosh \frac{n\,\pi\,h}{2b}} \right) \cos \frac{n\,\pi\,x}{b} \quad . \tag{3.24}$$

Diese ist im folgenden Bild für $\beta = \frac{h}{b} = 2$ dargestellt:



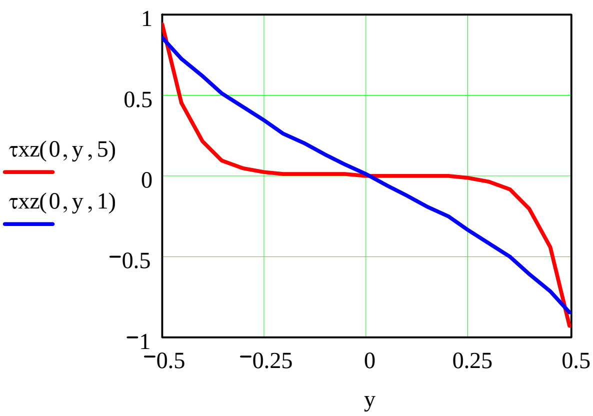
Spannungsfunktion

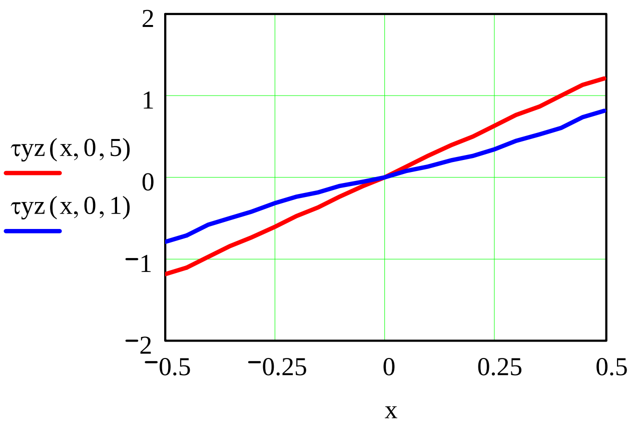
Daraus werden die Spannungen berechnet:

$$\tau_{xz}(x,y) = \frac{8}{\pi^2} G\,\vartheta\, b \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^2} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{b}}{\cosh \frac{n\pi h}{2b}} \cos \frac{n\pi x}{b}$$

$$\tau_{yz}(x,y) = \frac{8}{\pi^2} G\,\vartheta\, b \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{b}}{\cosh \frac{n\pi h}{2b}}\right) \sin \frac{n\pi x}{b} \qquad (3.25)$$

Diese sind in den beiden folgenden Diagrammen für $\beta = 1$ und $\beta = 5$ und $x = 0$ bzw. $y = 0$ dargestellt:



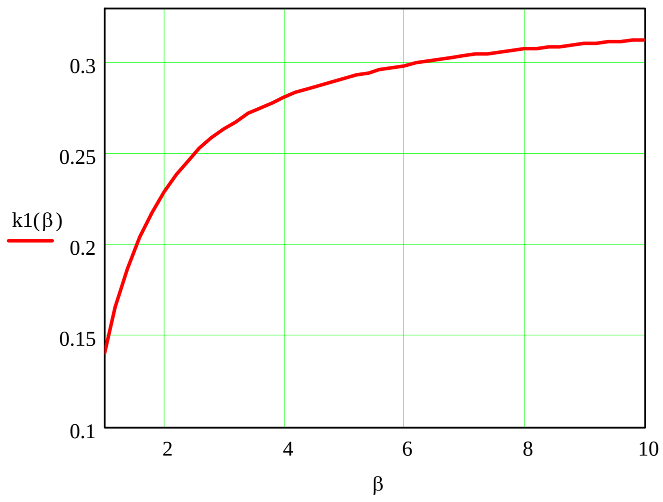


Das Trägheitsmoment folgt endlich zu:

$$I_t = b^3\, h\, k_1(\beta) \qquad \text{mit:} \quad k_1(\beta) = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\frac{1}{\beta} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi}{2}\beta\right) \qquad (3.26)$$

Im folgenden Diagramm ist das Trägheitsmoment I_t (Faktor k_1) in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis β des Rechtecks dargestellt:

$\beta =$	$k1(\beta) =$
1	0.134
1.2	0.161
1.4	0.182
1.6	0.2
1.8	0.214
2	0.225
2.2	0.235
2.4	0.243
2.6	0.25
2.8	0.256
3	0.261
3.2	0.266
3.4	0.27
3.6	0.273
3.8	0.276
4	0.279



Ist das Rechteck sehr schmal, d. h. $b<<h$, dann kann schon die Dgl. des Problems vereinfacht werden:
Die Schubspannung τ_{xz} ändert sich in y-Richtung sehr wenig – im Gegensatz zu der Änderung der Spannung τ_{yz} in x-Richtung.
Es gilt daher:

$$\tau_{xz,y} << \tau_{yz,x} \quad .$$

Das ist gleichbedeutend mit:

$$\Phi_{,yy} << \Phi_{,xx} \quad .$$

Die partielle Dgl. $\Delta\Phi = -1$ geht in eine gewöhnliche über:

$$\Phi_{,xx} = -1 \quad .$$

Diese lässt sich sofort integrieren:

$$\Phi = -\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad .$$

Da Φ über x eine gerade Funktion sein und auf dem Rand $x = \pm\frac{b}{2}$ verschwinden muss, hat zu gelten:

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = \frac{b^2}{8} \quad .$$

Mit

$$\Phi = -\frac{x^2}{2} + \frac{b^2}{8} = \frac{b^2}{8}\left[1 - \left(\frac{2\,x}{b}\right)^2\right]$$

bestimmt man schließlich:

$$\tau_{yz} = -2\,G\,\vartheta\,\Phi_{,x} = 2\,G\,\vartheta\,x$$
$$I_t = 4\int_{(A)} \Phi\,dA = \frac{1}{3}\,b^3\,h \quad . \tag{3.27}$$

Diese Beziehungen werden auch für dünne **krummlinig berandete Querschnitte** benutzt:
Die Spannung verschwindet auf der Profilmittellinie, ändert sich linear über die Wanddicke h und erreicht an der Oberfläche den Maximalwert:

$$\tau_{zy_{\max}} = G\,\vartheta\,h \quad . \tag{3.28}$$

Setzt sich der Querschnitt aus ***n*** **Teilflächen** zusammen, dann gilt wegen des Querschnittserhalts für das Torsionsträgheitsmoment:

$$I_t = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i^3\,l_i \,. \tag{3.29}$$

l_i Länge des Abschnitts der Profilmittellinie mit der konstanten Dicke h_i

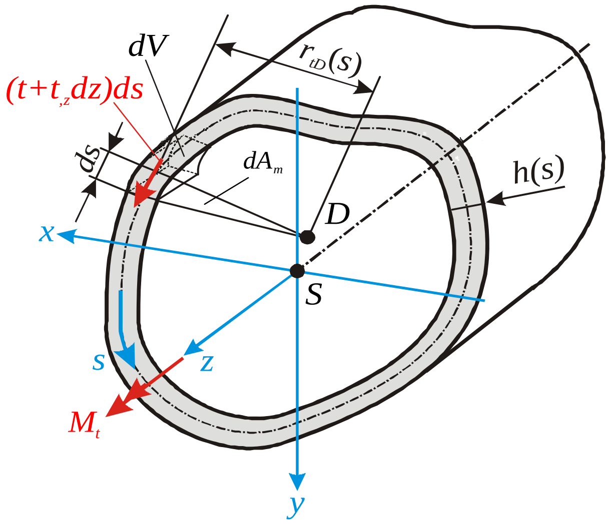
Auf Grund der Formulierung über die Profilmittellinie kommt es jedoch zum Überschneiden oder Auseinanderklaffen von Teilen des Querschnitts. In einschlägigen Taschenbüchern werden daher experimentell bestimmte Korrekturfaktoren vorgeschlagen.

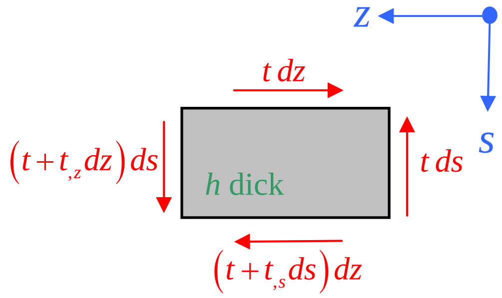
z. B. Dubbel:

Profil	L	[	⊥	I	I PB	+
Formel	$I_t = \frac{\eta}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i^3\,l_i$					
η	0,99	1,12	1,12	1,31	1,29	1,17

2.3.2 Geschlossene Querschnitte

Gleichgewicht am Stabelement $dV = ds\,dz\,h$:





$t = \tau_{zs}\, h$ Schubfluss

$\rightarrow$: $\quad \cancel{t\,dz} - \left(\cancel{t} + t_{,s}\, ds\right) dz = 0$

$\uparrow$: $\quad \cancel{t\,ds} - \left(\cancel{t} + t_{,z}\, dz\right) ds = 0$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt: t = konst.

Der Schubfluss ist also für *alle Punkte des Stabes* derselbe.

Momentenäquivalenz bezüglich Drehachse (mit (3.15)) und $t_{,z} = 0$:

$$dM_t = t\, r_{tD}(s)\, ds = t\, 2\, dA_m$$

$$M_t = t \oint r_{tD}(s)\, ds = t\, 2\, A_m$$

Darin ist A_m die vom Schubfluss eingeschlossene (mittlere) Fläche:

$$A_m = \frac{1}{2} \oint r_{tD}(s)\, ds \quad . \qquad (3.30)$$

Damit lautet der **Schubfluss**:

$$\boxed{t = \frac{M_t}{2\, A_m}} \quad . \qquad (3.31)$$

1. BREDTsche Formel
Rudolf Bredt, 1896, 1842 – 1900)

Die **maximale Schubspannung** tritt bei der geringsten Wanddicke auf:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{2\,A_m\,h_{\min}} \quad . \tag{3.32}$$

Die Beziehung für die **Drillung** wird über eine Energiebetrachtung gewonnen:

$$\underbrace{\frac{1}{2} M_t\,\varphi}_{\substack{\text{äußere}\\ \text{Arbeit}}} = \underbrace{\int_{(V)} \frac{\tau^2}{2\,G}\,dV}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Verzerrungsenergie}}} \quad .$$

Mit dem Volumen eines Stabelements $dV = ds\,l\,h$ und der 1. BREDTschen Formel erhält man daraus:

$$\frac{1}{2} M_t\,\varphi = \oint \frac{M_t^{\,2}}{4\,A_m^{\,2}}\,\frac{1}{h^2}\,\frac{1}{2\,G}\,l\,h\,ds = \frac{M_t^{\,2}}{4\,A_m^{\,2}}\,\frac{l}{2G} \oint \frac{ds}{h}$$

$$\boxed{\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G\,I_t} = \frac{M_t}{4\,A_m^{\,2}\,G} \oint \frac{ds}{h}} \quad . \qquad \text{2. BREDTsche Formel} \tag{3.33}$$

Damit kann für das **Torsionsträgheitsmoment** geschrieben werden:

$$\boxed{I_t = \frac{4\,A_m^{\,2}}{\oint \frac{ds}{h}}} \quad . \tag{3.34}$$

Die **Verwölbung** ist durch ein Zusatzglied gegenüber dem offenen Profil zu ergänzen.
Dazu werden die bereits bekannten Beziehungen (3.18) umgestellt:

$$\omega_{D,x} = -\left(y - y_D\right) - \frac{\tau_{xz}}{G\,\vartheta}$$

$$\omega_{D,y} = \left(x - x_D\right) - \frac{\tau_{yz}}{G\,\vartheta} \quad .$$

Nach Integration über *x* bzw. *y* folgt daraus ω_D zu:

$$\omega_D = \int_0^s \left[-\left(y - y_D\right)\frac{dx}{d\bar{s}} + \left(x - x_D\right)\frac{dy}{d\bar{s}} \right] d\bar{s} - \frac{1}{G\,\vartheta} \int_0^s \left(\tau_{xz}\,\frac{dx}{d\bar{s}} + \tau_{yz}\,\frac{dy}{d\bar{s}} \right) d\bar{s} + \omega_{D0} \quad .$$

Das erste Integral lässt sichwird wegen der Identität (s. S. 90) mit (3.16)

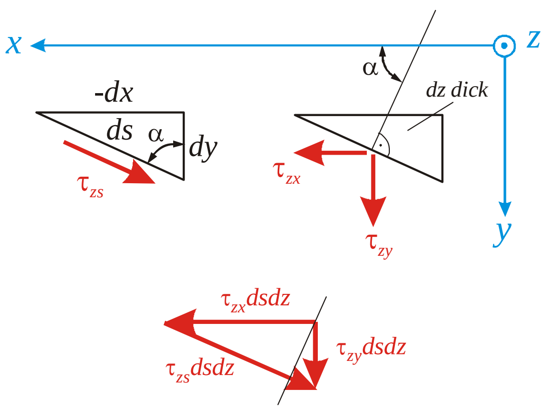
$$v_t = \varphi\left(y - y_D\right)\sin\alpha + \varphi\left(x - x_D\right)\cos\alpha \qquad \text{und}$$

$$v_t = r_{tD}\;\varphi$$

kürzer schreiben:

$$-\left(y - y_D\right)\frac{dx}{ds} + \left(x - x_D\right)\frac{dy}{ds} = r_{tD} \qquad .$$

Das zweite Integral kann wegen der Äquivalenz (s. Skizze) und (3.16)



$$-\tau_{zx}\;ds\sin\alpha\;dz + \tau_{zy}\;ds\cos\alpha\;dz = \tau_{zs}\;ds\;dz$$

$$\tau_{zx}\frac{dx}{ds} + \tau_{zy}\frac{dy}{ds} = \tau_{zs}$$

sowie (3.22)

$$M_t = G\,I_t\;\vartheta$$

ebenfalls vereinfacht werden:

$$\tau_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\,A_m\;h} = \frac{G\,I_t\;\vartheta}{2\,A_m\;h} \qquad .$$

Die Berechnungsvorschrift für die Verwölbung lautet schließlich:

$$\boxed{\omega_D(s) = \int_0^s r_{tD}\left(\bar{s}\right)d\bar{s} - \frac{I_t}{2\,A_m}\int_0^s \frac{d\bar{s}}{h\left(\bar{s}\right)} + \omega_{D0}} \qquad . \qquad (3.35)$$

ω_{D0} wird dadurch bestimmt, dass die Verwölbung über die gesamte Querschnitts-fläche verschwinden muss:

$$\omega_{D0} = \frac{1}{A}\int_{(A)}\left[\int_0^s\left(-r_{tD}(\bar{s}) + \frac{I_t}{2\,A_m\;h\left(\bar{s}\right)}\right)d\bar{s}\right]dA \qquad . \qquad (3.36)$$

Da der zum offenen Querschnitt zusätzliche Term ebenfalls nur von der Geometrie abhängt, bleibt die Einheitsverwölbung eine rein geometrische Größe.

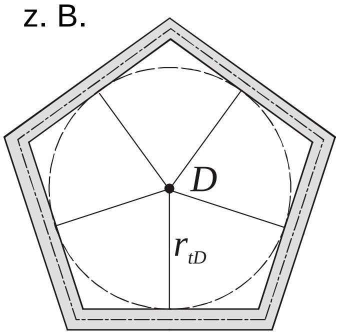
Auch für spezielle geschlossene Querschnitte lässt sich Wölbfreiheit nachweisen:

- *Geschlossene* Kreisringquerschnitte sind wegen des Verschwindens der Verwölbung auf den (unendlich vielen) Symmetrieachsen wölbfrei.

- Dreieckförmige *einzellige* Querschnitte sind wölbfrei, falls die Wanddicke seitenweise konstant ist.
  Die Verwölbung zwischen jeweils 2 Eckpunkten ist eine Gerade. Drei Punkte spannen eindeutig eine Ebene auf.

- Geschlossene Polygonquerschnitte mit *konstanter* Wanddicke, deren Profilmittellinien Kreistangenten-Polygone bilden, sind wölbfrei, damit auch alle regelmäßigen Vielecke (einschließlich Sonderform Kreis).

z. B.



$r_{tD}\, U = 2\, A_m$ U Umfang des Polygons

- Geschlossene Polygonquerschnitte mit *seitenweise konstanter* Wanddicke h_i sind wölbfrei, da

$$r_{tD1}\, h_1 = r_{tD2}\, h_2 = ... = r_{tDn}\, h_n = \frac{r_{ti}\, l_i}{\frac{l_i}{h_i}} = konst. \qquad i = 1, ..., n \qquad .$$