2. (Rechteck-)Platten

Platte – *ebenes* Flächentragwerk, das nur *senkrecht* zur Mittelfläche belastet wird.

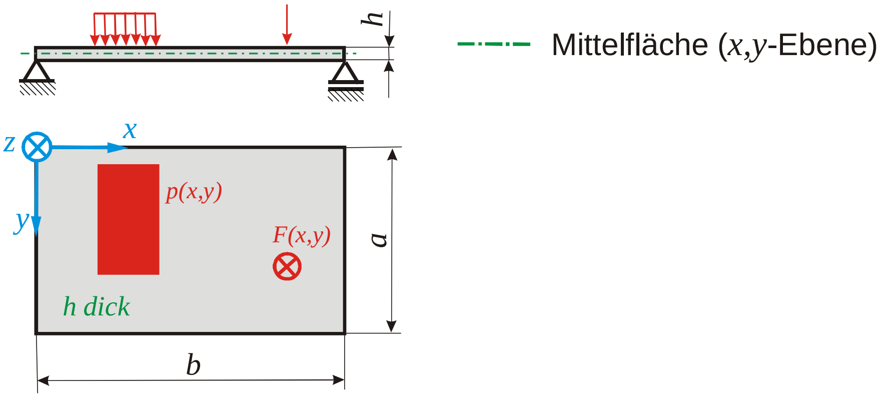
Eine *beliebige* Belastung wird in eine Belastung in der Mittelfläche (Scheibe) und eine senkrecht dazu (Platte) zerlegt.
Im Rahmen der linearen Theorie ist eine Superposition möglich.

(Kreisplatten wurden in der Lehrveranstaltung „Technische Mechanik“ behandelt.)

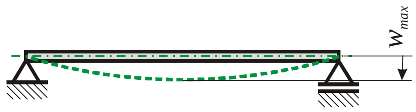
2.1 Plattenbiegung

2.1.1 Voraussetzungen (nach KIRCHHOFF)

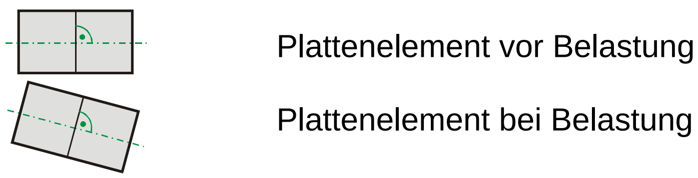
(Gustav Robert Kirchhoff, 1824 – 1887)



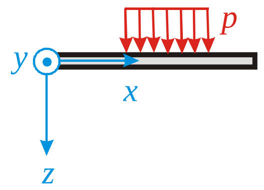
- Plattendicke $h << a, b$
- Durchbiegung $w(x,y)$ (Verschiebung in z-Richtung) durch die der Plattenmittelfläche repräsentiert



- Durchbiegung klein gegenüber Plattendicke h
- Querschnitte $\perp$ zu unverformter Mittelfläche bleiben bei Belastung eben und $\perp$ zu verformter Mittelfläche (entspricht BERNOULLI-Hypothese beim Balken)



- Normal- und Schubspannungen in Dickenrichtung werden vernachlässigt (ESZ) tatsächlich aber z. B.: $\sigma_{zz}\left(z=-h/2\right)=-p$

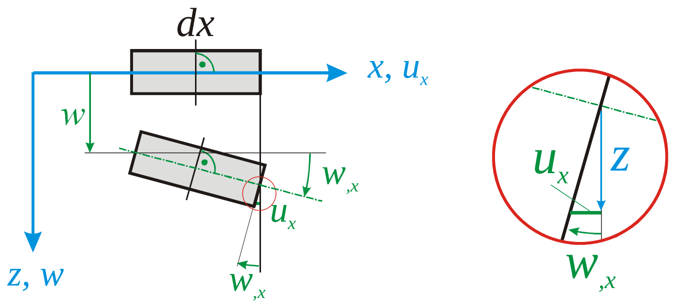


- konstante Plattendicke (nicht notwendig, vereinfacht jedoch Herleitungen)

2.1.2 Herleitung einer Dgl. für die Plattendurchbiegung $w(x,y)$

Geometrie

z. B. am Schnitt y = konst.:



Verschiebungen:

$$u_x = -z\, w_{,x}$$

analog am Schnitt x = konst.:

$$u_y = -z\, w_{,y}$$

Verzerrungen:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} = \left(-z\, w_{,x}\right)_{,x} = -z\, w_{,xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y,y} = \left(-z\, w_{,y}\right)_{,y} = -z\, w_{,yy}$$

$$\varepsilon_{zz} = w_{,z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} = -2\, z\, w_{,xy}$$

$$\gamma_{xz} = u_{x,z} + w_{,x} = -w_{,x} + w_{,x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = u_{y,z} + w_{,y} = -w_{,y} + w_{,y} = 0 \qquad \text{(EVZ)}$$

HOOKEsches Gesetz

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\, \varepsilon_{yy}\right) = -\frac{E\, z}{1-\nu^2}\left(w_{,xx} + \nu\, w_{,yy}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\, \varepsilon_{xx}\right) = -\frac{E\, z}{1-\nu^2}\left(w_{,yy} + \nu\, w_{,xx}\right)$$

$$\tau_{xy} = G\, \gamma_{xy} = -2\, G\, z\, w_{,xy} = -\frac{E\, z}{1+\nu}\, w_{,xy}$$

Schnittgrößen

Definition: s. S. 9 (1.10)

Formulierung der *Schnittmomente* mit den partiellen Ableitungen von *w:*

$$m_x = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(w_{,xx}+\nu\, w_{,yy}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, dz = -\frac{E\, h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(w_{,xx}+\nu\, w_{,yy}\right) = -K\left(w_{,xx}+\nu\, w_{,yy}\right)$$

$$m_y = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(w_{,yy}+\nu\, w_{,xx}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, dz = -\frac{E\, h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(w_{,yy}+\nu\, w_{,xx}\right) = -K\left(w_{,yy}+\nu\, w_{,xx}\right) \quad (2.7)$$

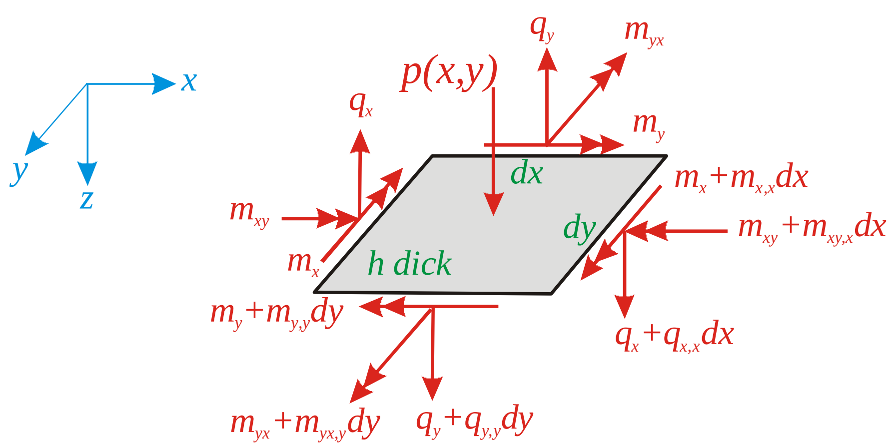
$$m_{xy} = m_{yx} = -\frac{E}{1+\nu} w_{,xy}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, dz = -\frac{E\, h^3}{12\left(1+\nu\right)} w_{,xy} = -\left(1-\nu\right) K\, w_{,xy}$$

$$\boxed{K = \frac{E\, h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}} \qquad [K] = Nm \quad \text{Plattensteifigkeit} \qquad (2.8)$$

Die *Querkräfte* q_x und q_y lassen sich hier nicht formulieren, da $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.
Sie folgen später aus den Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement.

Für die *Normalkräfte* gilt $n_x = n_y = n_{xy} = 0$, da die zugehörigen Spannungen linear in *z* sind.

Gleichgewicht am Plattenelement $dV = dx\; dy\; h$



$$\downarrow: \quad p\left(x,y\right) dx\; dy + q_{x,x}\; dx\; dy + q_{y,y}\; dy\; dx = 0$$

$$\twoheadrightarrow: \quad q_y\; dx\; dy - m_{xy,x}\; dx\; dy - m_{y,y}\; dy\; dx = 0$$

$$\swarrow\!\!\swarrow: \quad -q_x\; dy\; dx + m_{yx,y}\; dy\; dx + m_{x,x}\; dx\; dy = 0$$

Vereinfacht:

$$q_{x,x} + q_{y,y} = -p(x,y)$$
$$m_{y,y} + m_{xy,x} = q_y$$
$$m_{x,x} + m_{yx,y} = q_x \quad .$$

Die zweite Gleichung wird partiell nach y, die dritte Gleichung nach x differenziert. Die Ergebnisse werden in die erste Gleichung eingesetzt:

$$m_{x,xx} + 2\,m_{xy,xy} + m_{y,yy} = -p(x,y)$$

Daraus wird mit den partiellen Ableitungen der Durchbiegung:

$$-K\left(w_{,xxxx} + \nu\, w_{,yyxx}\right) - 2\,(1-\nu)\,K\,w_{,xyxy} - K\left(w_{,yyyy} + \nu\, w_{,xxyy}\right) = -p(x,y) \quad .$$

Das Ergebnis ist die **KIRCHHOFFsche Plattengleichung**:

$$w_{,xxxx} + 2\,w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{p(x,y)}{K}$$

$$\boxed{\Delta\Delta w(x,y) = \frac{p(x,y)}{K}} \qquad \text{(inhomogene Bipotenzialgleichung)} \qquad (2.9)$$

Spannungsverteilungen

$$\sigma_{xx} = -\frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(w_{,xx} + \nu\, w_{,yy}\right) = \frac{E\,z}{1-\nu^2}\,\frac{m_x\;12\,(1-\nu^2)}{E\,h^3}$$

$$\boxed{\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3}\,m_x\,z} \qquad \boxed{\sigma_{xx\,\max} = \frac{6}{h^2}\,m_x}$$ Vergleich mit der Balkenbiegung!

analog:

$$\boxed{\sigma_{yy} = \frac{12}{h^3}\,m_y\,z} \qquad \boxed{\sigma_{yy\,\max} = \frac{6}{h^2}\,m_y} \qquad (2.10)$$

und:

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{12}{h^3}\,m_{xy}\,z} \qquad \boxed{\tau_{xy\,\max} = \frac{6}{h^2}\,m_{xy}} \quad .$$

Die restlichen Spannungen folgen mit den bereits bekannten Spannungen über die Gleichgewichtsbedingungen am **Volumen**element $\sigma_{kl,k} = 0$ ((1.3) S. 7) für $\underline{l = x}$:

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} = 0$$

$$\tau_{zx,z} = -\sigma_{xx,x} - \tau_{yx,y}$$

$$\tau_{zx,z} = \frac{E\,z}{1-\nu^2}\left(w_{,xxx} + \nu\, w_{,xyy} + \frac{1-\nu^2}{1+\nu} w_{,xyy}\right) = \frac{E\,z}{1-\nu^2}(\Delta w)_{,x} \qquad \Big| \text{best. Integration über } z$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\Delta w)_{,x} \int_{-\frac{h}{2}}^{z} \bar{z}\, d\bar{z} = \frac{E}{1-\nu^2}(\Delta w)_{,x}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right)$$

In dieser Gleichung wird der Term $(\Delta w)_{,x}$ ersetzt über die dritte Gleichgewichtsbedingung am **Platten**element:

$$\begin{aligned} q_x &= m_{x,x} + m_{yx,y} = -K\left[w_{,xxx} + \nu\, w_{,xyy} + (1-\nu)\, w_{,xyy}\right] \\ &= -K\,(\Delta w)_{,x} \end{aligned} \tag{2.11}$$

analog:

$$q_y = -K\,(\Delta w)_{,y}$$

Damit lautet τ_{zx} endgültig:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{q_x}{h}\left[1-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right] \qquad \tau_{xz\,\max} = \frac{3}{2}\frac{q_x}{h} \tag{2.12}$$

Analoge Überlegungen für $\underline{l = y}$ führen auf:

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2}\frac{q_y}{h}\left[1-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right] \qquad \tau_{yz\,\max} = \frac{3}{2}\frac{q_y}{h} \quad .$$

Schließlich gewinnt man über die dritte Gleichgewichtsbedingung ($\underline{l = z}$):

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0$$

$$\sigma_{zz,z} = -\tau_{xz,x} - \tau_{yz,y} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^2}{8}\left[1-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right]\left[\Delta w_{,xx} + \Delta w_{,yy}\right] = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^2}{8}\Delta\Delta w\left[1-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right]$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^2}{8}\frac{p(x,y)\;\;12\;\;(1-\nu^2)}{E\,h^3}\left[1-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right] = \frac{3}{2}\frac{p(x,y)}{h}\left[1-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^2\right] \quad .$$

Unbestimmte Integration über *z:*

$$\sigma_{zz} = \frac{3}{2}\frac{p(x,y)}{h}\left[z-\left(\frac{2\,z}{h}\right)^3\frac{1}{3}\frac{h}{2} + c\right]$$

Bestimmung der Integrationskonstanten c über die Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right)=0 && \Rightarrow \quad \ldots\left(\frac{h}{2}-\frac{1}{3}\frac{h}{2}+c\right)=0 \\ &\sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right)=-p && \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\frac{p}{h}\left(-\frac{h}{2}+\frac{h}{6}+c\right)=-p \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c=-\frac{h}{3}$$

Schließlich folgt die gesuchte Spannung:

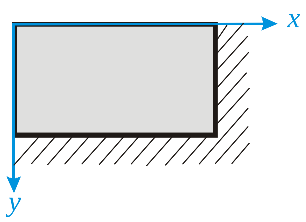
$$\boxed{\sigma_{zz}=-\frac{p(x,y)}{4}\left[2-3\frac{2\,z}{h}+\left(\frac{2\,z}{h}\right)^{3}\right]} \quad . \tag{2.13}$$

Wegen der relativen Kleinheit von $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_{zz}$ gegenüber $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ kann bei der Dimensionierung der Platte die Vergleichsspannung ausschließlich mit $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ berechnet werden.

2.1.3 Randbedingungen

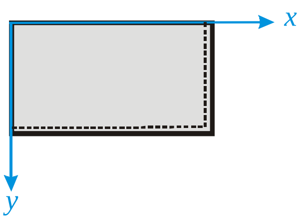
Für die Lösung der partiellen Dgl. vierter Ordnung sind insgesamt 8 Randbedingungen erforderlich. Da jeder Rand der (Rechteck-)Platte gleichberechtigt ist, sind pro Rand 2 Bedingungen zu formulieren.

- eingespannter Rand:



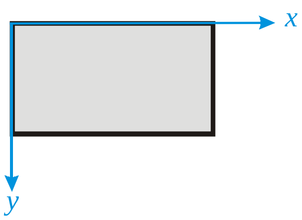
$$\begin{aligned} x=\text{konst.:}\quad & w=0 \\ & w_{,x}=0 \\ & \Rightarrow \quad w_{,y}=0 \quad \Rightarrow \quad w_{,xy}=0 \quad (\Rightarrow m_{xy}=0) \\ y=\text{konst.:}\quad & w=0 \\ & w_{,y}=0 \\ & \Rightarrow \quad w_{,x}=0 \quad \Rightarrow \quad w_{,xy}=0 \quad (\Rightarrow m_{xy}=0) \end{aligned}$$

- gelenkig gelagerter Rand:



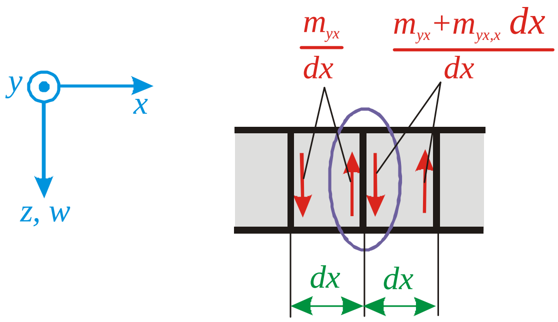
$$\begin{aligned} x=\text{konst.:}\quad & w=0 \\ & m_x=-K\left(w_{,xx}+\nu\,w_{,yy}\right)=0 \\ & \Rightarrow \quad w_{,y}=0 \quad \Rightarrow \quad w_{,yy}=0 \quad \Rightarrow \quad w_{,xx}=0 \quad \Rightarrow \Delta w=0 \\ y=\text{konst.:}\quad & \text{analog} \end{aligned}$$

- freier Rand:



$$\begin{aligned} x=\text{konst.:}\quad & \left.\begin{aligned} & m_x=0 \\ & q_x=0 \\ & m_{xy}=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Überbestimmung (pro Rand nur 2 RB!)} \\ y=\text{konst.:}\quad & \text{analog} \end{aligned}$$

Deutung der Überbestimmung am freien Rand:



$\Rightarrow$ $m_{yx,x}$ zusätzliche Querkraft

Definition einer Ersatzquerkraft:

$$\bar{q}_y = q_y + m_{yx,x} \qquad (2.14)$$

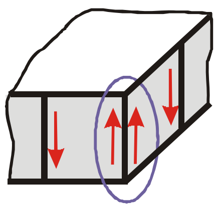
analog:

$$\bar{q}_x = q_x + m_{xy,y}$$

Damit korrigierte Randbedingungen am freien Rand:

$$x = \text{konst.}: \quad m_x = 0$$
$$\bar{q}_x = 0$$
$y = \text{konst.}:$ analog

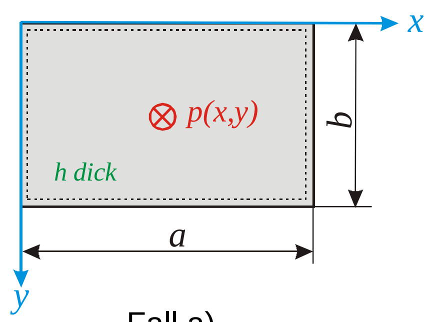
Die Ersatzquerkraft führt zu einem Problem an den freien Ecken: „Eckkraft“ F_E



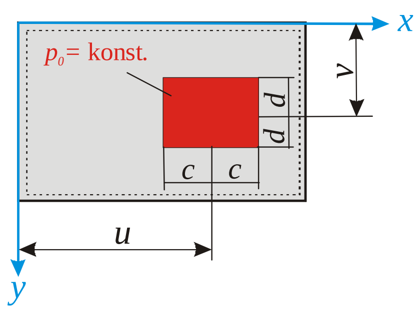
$$\Rightarrow \qquad F_E = m_{yx} + m_{xy} = 2\,m_{xy} = -2\left(1-\nu\right) K\, w_{,xy} \qquad (2.15)$$

2.1.4 Beispiel

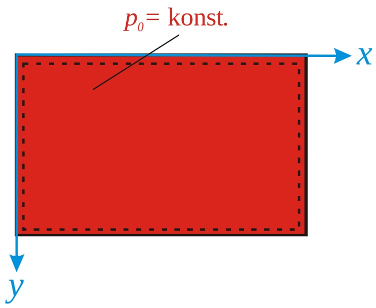
Allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte unter Belastung $p(x,y)$



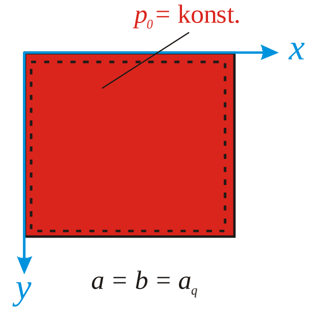
Fall a)



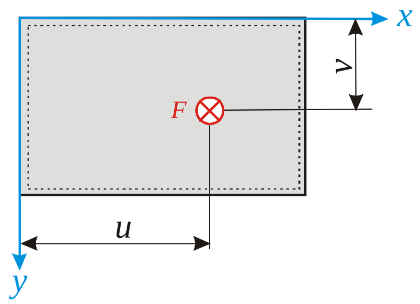
Fall b)



Fall c)



Fall d)



Fall e)

Geg.: $a,\ b,\ p(x,y),\ E,\ h,\ \nu$

speziell: $p_0 = 10\ MPa, \quad F = 4\ p_0\ c\ d,$

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ MPa, \quad \nu = 0{,}3,$

$a = 3\ m, \quad b = 2\ m, \quad h = 0{,}15\ m, \quad a_q = 2\ m,$

$c = 0{,}3\ m, \quad d = 0{,}2\ m, \quad u = 2\ m, \quad v = 1{,}2\ m$

Ges.: Für die Lastfälle a) bis e):

1. Durchbiegungsverlauf $w(x,y)$
2. maximale Durchbiegung

Die Dgl. zur Beschreibung des Problems lautet:

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{p(x,y)}{K} \qquad \text{mit:} \quad K = \frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \quad .$$

Die Lösung hat die Randbedingungen (jeweils 2 an den 4 Rändern)

$$\left.\begin{aligned} x &= 0: \\ x &= a: \end{aligned}\right\} \qquad w = 0 \qquad w_{,xx} = 0 \quad (m_x = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 0: \\ y &= b: \end{aligned}\right\} \qquad w = 0 \qquad w_{,yy} = 0 \quad (m_y = 0)$$

zu erfüllen.

Für die Durchbiegung wird daher der Ansatz für eine Doppel-FOURIER-Reihe (antimetrische Funktionen der Periodenlänge $2a$ bzw $2b$ – [s. 2/4])

$$w(x,y) = \sum_{m=1,2,..}^{\infty} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\,\pi\,x}{a} \sin\frac{n\,\pi\,y}{b}$$

gewählt.

Die Belastung wird in eine analoge Reihe entwickelt:

$$p(x,y) = \sum_{m=1,2,..}^{\infty} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} p_{mn} \sin\frac{m\,\pi\,x}{a} \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} \quad .$$

In die Dgl. eingesetzt, liefern beide Ansätze:

$$\sum_{m=1,2,...}^{\infty} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} w_{mn} \left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2 \sin\frac{m\,\pi\,x}{a} \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} = \frac{1}{K} \sum_{m=1,2,...}^{\infty} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} p_{mn} \sin\frac{m\,\pi\,x}{a} \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} \quad .$$

Der Koeffizientenvergleich für einzelne Reihenglieder m, n führt auf den Zusammenhang der Beiwerte für Belastung und Verformung:

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{K\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2} \quad .$$

Damit ist das Problem formal gelöst. Diese Lösung wurde erstmals von NAVIER (Claude Navier, 1785 - 1836) angegeben:

$$w(x,y) = \sum_{m=1,2,..}^{\infty} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \frac{p_{mn}}{K\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\,\pi\,x}{a} \sin\frac{n\,\pi\,y}{b}$$

Anschließend müssen die FOURIER-Koeffizienten p_{mn} für die konkrete Belastung ermittelt werden.

Fall b)

Spezialfall: konstante Belastung p_0 über Rechteckfläche der Größe $2c$ x $2d$, deren Lage durch u und v charakterisiert ist

Die Rechtecklast wird zunächst in eine über die Länge a gleich verteilte Last in y-Richtung entwickelt [2/4] :

$$p(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\,\pi\,y}{b} + b_n \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} \right) \quad .$$

Die Entwicklung hat für eine ungerade Funktion zu erfolgen. Es gilt:

$$a_0 = 0 \quad , \qquad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} p(y) \, \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} dy \qquad .$$

Wir erhalten mit [2/5] die b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{p_0}{b} \left[- \int_{y=-v-d}^{y=-v+d} \sin\frac{n\pi y}{b} dy + \int_{y=v-d}^{y=v+d} \sin\frac{n\pi y}{b} dy \right] = -2\,\frac{p_0}{b}\,\frac{b}{n\pi} \cos\frac{n\pi y}{b} \Bigg|_{v-d}^{v+d} \\ &= -2\,\frac{p_0}{n\pi} \left[\cos\frac{n\pi}{b}(v+d) - \cos\frac{n\pi}{b}(v-d) \right] \\ &= -2\,\frac{p_0}{n\pi} \left[\cos\frac{n\pi v}{b} \cos\frac{n\pi d}{b} - \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b} - \cos\frac{n\pi v}{b} \cos\frac{n\pi d}{b} - \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b} \right] \\ &= 4\,\frac{p_0}{n\pi} \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b} \end{aligned}$$

und damit:

$$p(y) = \frac{4 p_0}{\pi} \sum_{n=1,2,..}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi v}{b} \, \sin\frac{n\pi d}{b} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Die Reihenentwicklung in x-Richtung ergibt dann analog:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{4\,p(y)}{\pi} \sum_{m=1,2,..}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \\ &= \frac{16\,p_0}{\pi^2} \sum_{m=1,2,..}^{\infty} \sum_{n=1,2,..}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad . \end{aligned}$$

Die Beiwerte für die Belastung sind damit:

$$p_{mn} = \frac{16\,p_0}{\pi^2 m\,n} \sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b} \quad .$$

Mit diesen folgen die Beiwerte der Durchbiegung:

$$w_{mn} = \frac{16\, p_0}{K\pi^6 m\, n} \frac{\sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}$$

und die endgültige Lösung:

$$w(x,\, y) = \frac{16\, p_0}{K\, \pi^6} \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m\, n} \frac{\sin\frac{m\pi u}{a} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi v}{b} \sin\frac{n\pi d}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Fall c):
Spezialfall: konstante Belastung p_0 über gesamte Rechteckfläche

Für Geometrie und Belastung gelten:

$$c = u = \frac{a}{2}, \qquad d = v = \frac{b}{2}, \qquad p\left(x, y\right) = p_0 \qquad .$$

Die Koordinaten unabhängigen sinus-Funktionen nehmen damit folgende Werte an:

$$\left(\sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2}\right)^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } m \text{ und/oder } n = 2, 4, \ldots \\ \left(-1\right)^{m+n-2} = 1 & \text{für } m \text{ und } n = 1, 3, \ldots \end{cases} \quad .$$

Mit diesen Werten lautet die Gleichung für die Durchbiegung:

$$w(x, y) = \frac{16\, p_0}{K\, \pi^6} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m\, n} \frac{1}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Fall d):

Spezialfall: konstante Belastung p_0 über gesamte **Quadrat**platte:

Für Geometrie und Belastung der Quadratplatte gelten:

$$a = b = a_q \ , \qquad p(x,y) = p_0 \qquad .$$

Damit lautet die letzte Gleichung aus dem Fall c) :

$$\underline{w(x,y) = \frac{16\ p_0\ a_q^4}{K\ \pi^6} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m\ n} \frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2} \sin\frac{m\pi x}{a_q} \sin\frac{n\pi y}{a_q}} \qquad .$$

Die maximale Durchbiegung tritt in der Plattenmitte auf:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= w\left(\frac{a_q}{2};\ \frac{a_q}{2}\right) \\ &= \frac{16\ p_0\ a_q^4}{K\ \pi^6} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m\ n} \frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \\ &= \frac{16\ p_0\ a_q^4}{K\ \pi^6} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{100} + \frac{1}{5}\frac{1}{676} - + \ldots\right)}_{m=1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{100} + \frac{1}{9}\frac{1}{324} - + \ldots\right)}_{m=3} \right] \end{aligned} \qquad .$$

Wie man sieht, konvergiert diese Reihe sehr gut.

Für die maximale Durchbiegung gilt daher:

$$\underline{w_{\max} \approx 0{,}00406 \frac{p_0\ a_q^4}{K}} \qquad \text{mit:} \quad K = \frac{E\ h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$\underline{w_{\max} \approx 10{,}01\,mm} \qquad .$$

Fall e)

Spezialfall: Zusammenfassung der Streckenlast aus Fall b) zu einer äquivalenten Einzelkraft

Die äquivalente Belastung:

$$F = 4\, p_0\, c\, d$$

wird in die Lösung des Falls b) eingesetzt:

$$w(x,y) = \frac{16\,F}{4\,c\,d\,K\,\pi^6} \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\sin\frac{m\pi u}{a}\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi v}{b}\sin\frac{n\pi d}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$= \frac{4\,F}{a\,b\,K\,\pi^4} \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi d}{b}}{\frac{m\pi c}{a}\,\frac{n\pi d}{b}} \frac{\sin\frac{m\pi u}{a}\sin\frac{n\pi v}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Da die Abmessungen c und d gegen null gehen, vereinfacht sich $w(x,y)$ zu:

$$w(x,y) = \frac{4\,F}{a\,b\,K\,\pi^4} \sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi u}{a}\sin\frac{n\pi v}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Überprüfung und Ergänzung der Lösungen mit dem **Programm mathcad**:

Fall b):

Abmessungen

$a := 3\cdot m$ $b := 2\cdot m$ $h := 0.15\cdot m$ $c := 0.3\cdot m$ $d := 0.2\cdot m$ $u := 2\cdot m$ $v := 1.2\cdot m$

Materialkennwerte:

$E := 2.1\cdot 10^5\cdot MPa$ $\nu := 0.3$ $MPa \equiv 10^6\,\frac{N}{m^2}$

Belastung: $p_0 := 10\cdot MPa$

Anzahl der FOURIERreihenglieder:

$m_{max} := 20$ $n_{max} := 20$

Plattensteifigkeit:

$$K := \frac{E\cdot h^3}{12\cdot(1-\nu^2)} \qquad K = 6.49\times 10^4\cdot kN\cdot m$$

Koeffizienten:

$$f(m\_,n) := \frac{16}{\pi^2\cdot m\_\cdot n}\cdot\sin\left(\frac{m\_\cdot\pi\cdot u}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\_\cdot\pi\cdot c}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot v}{b}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot d}{b}\right)$$

Ergebnisse:

$$w(x,y) := \frac{p_0}{K\cdot\pi^4}\cdot\sum_{m\_=1}^{m_{max}}\sum_{n=1}^{n_{max}}\left[\frac{f(m\_,n)}{\left(\frac{m\_^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{m\_\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot y}{b}\right)\right]$$

$$m_x(x,y) := \frac{p_0}{\pi^2}\cdot\sum_{m\_=1}^{m_{max}}\sum_{n=1}^{n_{max}}\left[\frac{f(m\_,n)}{\left(\frac{m\_^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{m\_\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot y}{b}\right)\cdot\left(\frac{m\_^2}{a^2}+\nu\cdot\frac{n^2}{b^2}\right)\right]$$

$$m_y(x,y) := \frac{p_0}{\pi^2}\cdot\sum_{m\_=1}^{m_{max}}\sum_{n=1}^{n_{max}}\left[\frac{f(m\_,n)}{\left(\frac{m\_^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{m\_\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot y}{b}\right)\cdot\left(\frac{n^2}{b^2}+\nu\cdot\frac{m\_^2}{a^2}\right)\right]$$

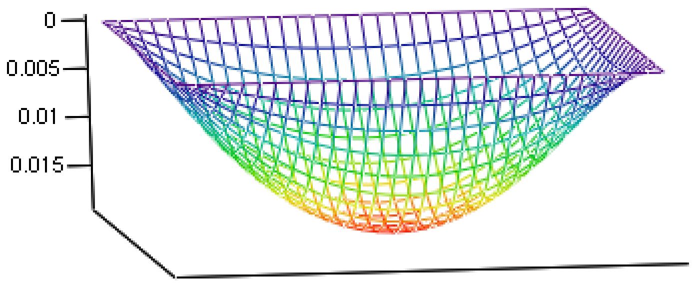
$$m_{xy}(x,y) := \frac{-p_0\cdot(1-\nu)}{\pi^2}\cdot\sum_{m\_=1}^{m_{max}}\sum_{n=1}^{n_{max}}\left[\frac{f(m\_,n)}{\left(\frac{m\_^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cdot\left(\cos\left(m\_\cdot\pi\cdot\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{m\_}{a}\cdot\cos\left(n\cdot\pi\cdot\frac{y}{b}\right)\cdot\frac{n}{b}\right)\right]$$

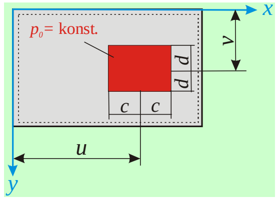
Grafische Darstellung:

$N_{min} := 20$ $N := \mathrm{ceil}\left[\frac{a}{\min((a\ \ b))}\cdot N_{min}\right]$ $M := \mathrm{ceil}\left[\frac{b}{\min((a\ \ b))}\cdot N_{min}\right]$

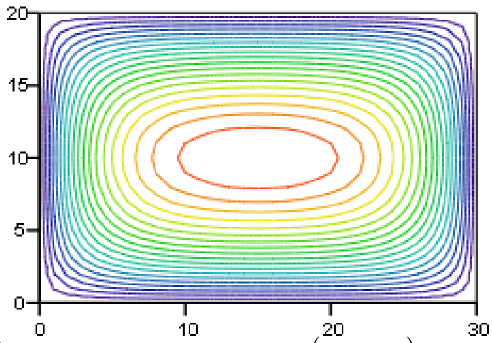
$i := 0..N$ $j := 0..M$ $xp_i := \frac{i\cdot a}{N}$ $yp_j := \frac{j\cdot b}{M}$ $N = 30$ $M = 20$

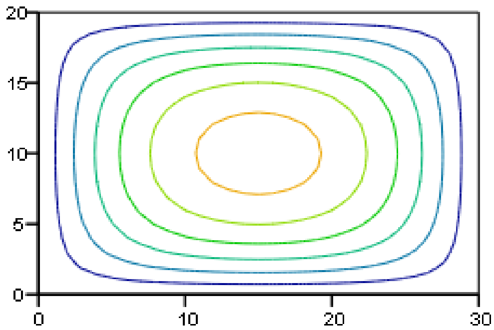
Durchbiegung $W_{i,j} := w\left(xp_i, yp_j\right)$



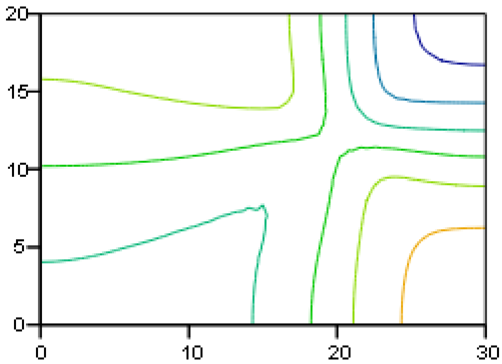


Biegemomente: $MX_{i,j} := m_x\left(xp_i, yp_j\right)$ $MY_{i,j} := m_y\left(xp_i, yp_j\right)$





Bördelmoment $MXY_{i,j} := m_{xy}\left(xp_i, yp_j\right)$



Spezielle Werte:

Extremwerte:

$\min(W) = 0\,\mathrm{mm}$ $\max(W) = 1.824\,\mathrm{mm}$

$\min(MX) = -0.9\,\mathrm{kN}$ $\max(MX) = 416.33 \cdot \mathrm{kN}$

$\min(MY) = 0 \cdot \mathrm{kN}$ $\max(MY) = 505.53 \cdot \mathrm{kN}$

$\min(MXY) = -175.022 \cdot \mathrm{kN}$ $\max(MXY) = 136.136 \cdot \mathrm{kN}$

Plattenmitte:

$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 1.546\,\mathrm{mm}$ $m_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 149.347 \cdot \mathrm{kN}$ $m_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 287.878 \cdot \mathrm{kN}$

Sonstige Werte:

$m_{xy}\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right) = -53.124 \cdot \mathrm{kN}$ $m_{xy}(0 \cdot \mathrm{m}, 0 \cdot \mathrm{m}) = -60.847 \cdot \mathrm{kN}$

Fall c):

Abmessungen

$a := 3 \cdot m \quad b := 2 \cdot m \quad h := 0.15 \cdot m \quad c := 1.5 \cdot m \quad d := 1 \cdot m \quad u := 1.5 \cdot m \quad v := 1 \cdot m$

Materialkennwerte:

$E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot MPa \qquad \nu := 0.3$

Belastung: $p_0 := 10 \cdot MPa$

Anzahl der FOURIERreihenglieder:

$m\_ := 1, 3 .. 21 \qquad n := 1, 3 .. 21$

Plattensteifigkeit:

$$K := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)} \qquad K = 6.49 \times 10^4 \cdot kN \cdot m$$

Ergebnisse:

$$w(x,y) := \frac{16 p_0}{K \cdot \pi^6} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{1}{m\_ \cdot n} \left[\frac{1}{\left(\frac{m\_^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m\_ \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \right) \right] \right]$$

$$m_x(x,y) := \frac{16 p_0}{\pi^4} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{\frac{m\_^2}{a^2} + \nu \cdot \frac{n^2}{b^2}}{\left(\frac{m\_^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m\_ \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \right) \cdot \frac{1}{m\_ \cdot n} \right]$$

$$m_y(x,y) := \frac{16 \cdot p_0}{\pi^4} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{\frac{n^2}{b^2} + \nu \cdot \frac{m\_^2}{a^2}}{\left(\frac{m\_^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m\_ \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \right) \cdot \frac{1}{m\_ \cdot n} \right]$$

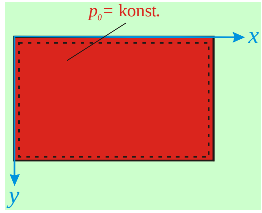
$$m_{xy}(x,y) := \frac{-16 p_0 \cdot (1 - \nu)}{\pi^4} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{\frac{1}{m\_ \cdot n}}{\left(\frac{m\_^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \left(\cos\left(m\_ \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \frac{m\_}{a} \cdot \cos\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \cdot \frac{n}{b} \right) \right]$$

Grafische Darstellung:

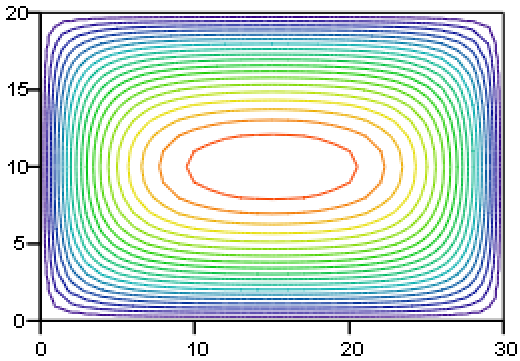
$N_{min} := 20 \qquad N := ceil\left[\frac{a}{min((a\ \ b))} \cdot N_{min} \right] \qquad M := ceil\left[\frac{b}{min((a\ \ b))} \cdot N_{min} \right]$

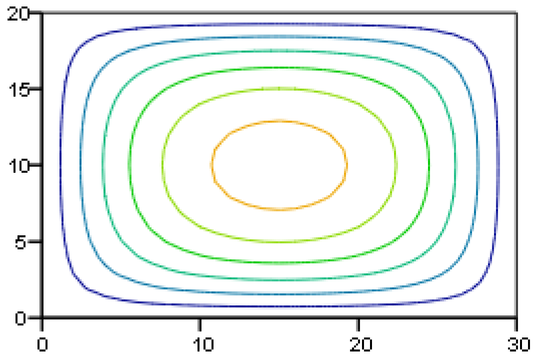
$i := 0 .. N \qquad j := 0 .. M \qquad xp_i := \frac{i \cdot a}{N} \qquad yp_j := \frac{j \cdot b}{M} \qquad N = 30 \qquad M = 20$

Durchbiegung $W_{i,j} := w(xp_i, yp_j)$

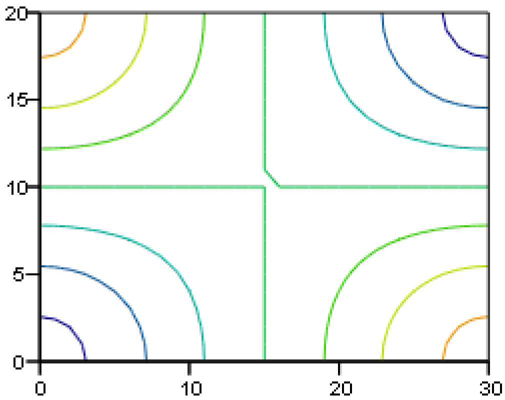


Biegemomente: $MX_{i,j} := m_x(xp_i, yp_j)$ $MY_{i,j} := m_y(xp_i, yp_j)$





Bördelmoment $MXY_{i,j} := m_{xy}(xp_i, yp_j)$



Spezielle Werte:

Extremwerte:

$\min(W) = 0\,m$ $\max(W) = 19.041 \cdot mm$

$\min(MX) = 0 \cdot kN$ $\max(MX) = 1.994 \times 10^3 \cdot kN$

$\min(MY) = 0 \cdot kN$ $\max(MY) = 3.247 \times 10^3 \cdot kN$

$\min(MXY) = -1.715 \times 10^3 \cdot kN$ $\max(MXY) = 1.715 \times 10^3 \cdot kN$

Plattenmitte:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 19.041\,mm$$

$$m_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 1.994 \times 10^3 \cdot kN \quad m_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 3.247 \times 10^3 \cdot kN \quad m_{xy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0\,kN$$

Sonstige Werte:

$$m_{xy}(0 \cdot m, 0 \cdot m) = -1.715 \times 10^3 \cdot kN \quad m_{xy}\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right) = -660.05 \cdot kN$$

Fall d):

Abmessungen

$aq := 2 \cdot m$ $h := 0.15 \cdot m$

Materialkennwerte:

$E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot MPa$ $\nu := 0.3$ $MPa \equiv 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

Belastung: $p_0 := 10 \cdot MPa$

Anzahl der FOURIERreihenglieder:

$m\_ := 1, 3 .. 21$ $n := 1, 3 .. 21$

Plattensteifigkeit:

$$K := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)} \qquad K = 6.49 \times 10^4 \, kN \cdot m$$

Ergebnisse:

$$w(x,y) := \frac{16 p_0 \cdot aq^4}{K \cdot \pi^6} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{1}{\left(m\_^2 + n^2\right)^2} \cdot \frac{1}{m\_ \cdot n} \sin\left(\frac{m\_ \cdot \pi \cdot x}{aq}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{aq}\right) \right]$$

$$m_x(x,y) := \frac{16 p_0 \cdot aq^2}{\pi^4} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{m\_^2 + \nu \cdot n^2}{\left(m\_^2 + n^2\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m\_ \cdot \pi \cdot x}{aq}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{aq}\right) \cdot \frac{1}{m\_ \cdot n} \right]$$

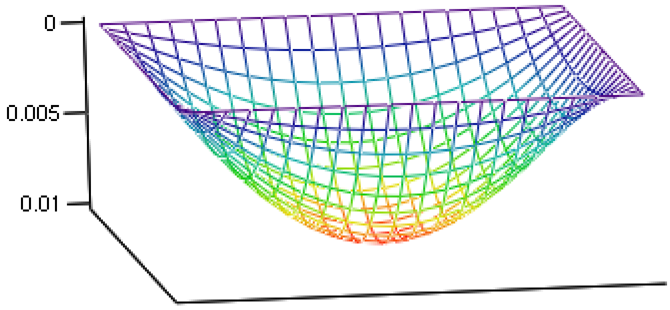
$$m_y(x,y) := \frac{16 \cdot p_0 \cdot aq^2}{\pi^4} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{n^2 + \nu \cdot m\_^2}{\left(m\_^2 + n^2\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m\_ \cdot \pi \cdot x}{aq}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{aq}\right) \cdot \frac{1}{m\_ \cdot n} \right]$$

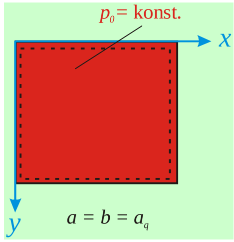
$$m_{xy}(x,y) := \frac{-16 p_0 \cdot (1 - \nu) \cdot aq^2}{\pi^4} \cdot \sum_{m\_} \sum_{n} \left[\frac{1}{\left(m\_^2 + n^2\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{m\_ \cdot \pi \, x}{aq}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \, y}{aq}\right) \cdot \frac{1}{m\_ \cdot n} \right]$$

Grafische Darstellung:

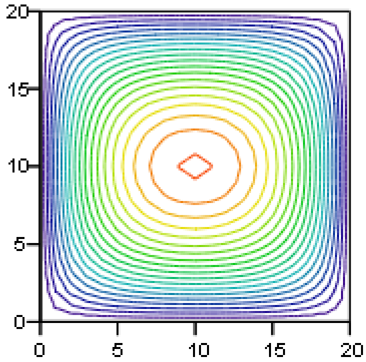
$i := 0 .. 20$ $j := 0 .. 20$ $xp_i := \frac{i \cdot aq}{20}$ $yp_j := \frac{j \cdot aq}{20}$

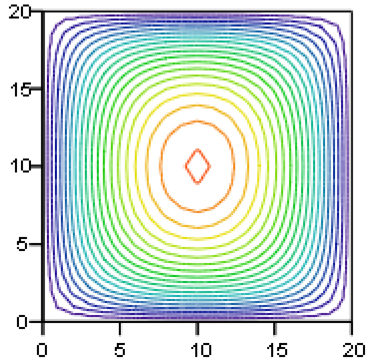
Durchbiegung $W_{i,j} := w(xp_i, yp_j)$



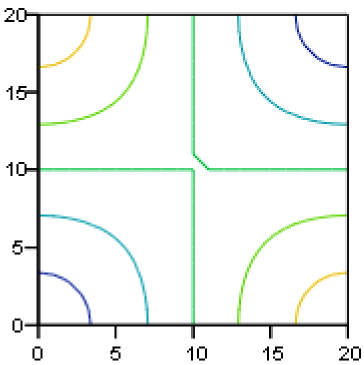


Biegemomente: $MX_{i,j} := m_x(xp_i, yp_j)$ $MY_{i,j} := m_y(xp_i, yp_j)$





Bördelmoment $MXY_{i,j} := m_{xy}(xp_i, yp_j)$



Spezielle Werte:

Extremwerte:

$\min(W) = 0\,m$ $\max(W) = 10.014\,mm$

$\min(MX) = 0\,kN$ $\max(MX) = 1.916 \times 10^3\,kN$

$\min(MY) = 0\,kN$ $\max(MY) = 1.916 \times 10^3\,kN$

$\min(MXY) = -1.186 \times 10^3\,kN$ $\max(MXY) = 1.186 \times 10^3\,kN$

Plattenmitte:

$m_x\left(\frac{aq}{2}, \frac{aq}{2}\right) = 1.916 \times 10^3\,kN$ $m_y\left(\frac{aq}{2}, \frac{aq}{2}\right) = 1.916 \times 10^3\,kN$

Sonstige Werte:

$m_{xy}(0 \cdot m, 0 \cdot m) = -1.186 \times 10^3\,kN$ $m_{xy}\left(\frac{aq}{4}, \frac{aq}{4}\right) = -559.502\,kN$

Fall e):

Abmessungen

$a := 3 \cdot m \qquad b := 2 \cdot m \qquad u := 2 \cdot m \qquad v := 1.2 \cdot m \qquad h := 0.15 \cdot m$

Materialkennwerte:

$E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot MPa \qquad \nu := 0.3$

Belastung: $F := 4 \cdot 10MPa \cdot 0.2 \cdot m \cdot 0.3 \cdot m \qquad F = 2.4 \times 10^6 \cdot N$

Anzahl der FOURIER-Reihenglieder:

$ma := 20 \qquad na := 20$

Plattensteifigkeit:

$$K := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)} \qquad K = 6.49 \times 10^4 \cdot kN \cdot m$$

Ergebnisse:

$$w(x,y) := \frac{4F}{K \cdot \pi^4 a \cdot b} \cdot \sum_{m=1}^{ma} \sum_{n=1}^{na} \left[\frac{\sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot u}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot v}{b}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$m_x(x,y) := \frac{4F}{a \cdot b \pi^2} \cdot \sum_{m=1}^{ma} \sum_{n=1}^{na} \left[\frac{\frac{m^2}{a^2} + \nu \cdot \frac{n^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot u}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot v}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$m_y(x,y) := \frac{4F}{a \cdot b \pi^2} \cdot \sum_{m=1}^{ma} \sum_{n=1}^{na} \left[\frac{\frac{n^2}{b^2} + \nu \cdot \frac{m^2}{a^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot u}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot v}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

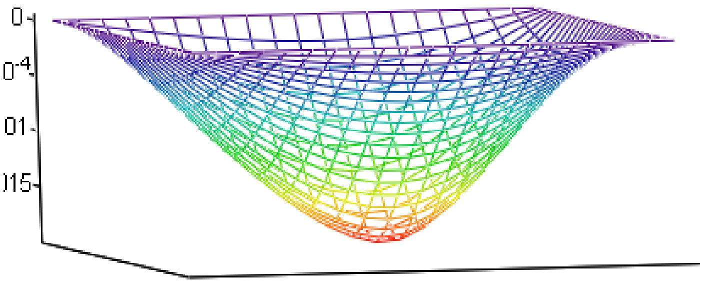
$$m_{xy}(x,y) := \frac{-4F \cdot (1 - \nu)}{a^2 \cdot b^2 \pi^2} \cdot \sum_{m=1}^{ma} \sum_{n=1}^{na} \left[\frac{m \cdot n \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot u}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot v}{b}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \cos\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

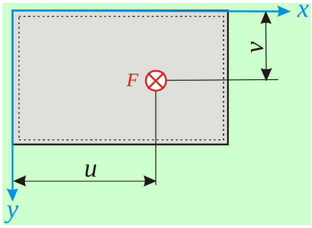
Grafische Darstellung:

$$N_{min} := 20 \qquad N := ceil\left[\frac{a}{\min((a\ \ b))} \cdot N_{min}\right] \qquad M := ceil\left[\frac{b}{\min((a\ \ b))} \cdot N_{min}\right]$$

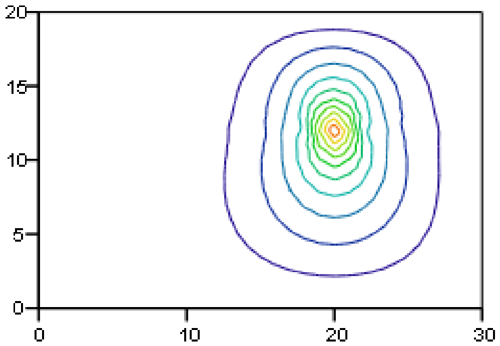
$$i := 0..N \qquad j := 0..M \qquad xp_i := \frac{i \cdot a}{N} \qquad yp_j := \frac{j \cdot b}{M} \qquad N = 30 \qquad M = 20$$

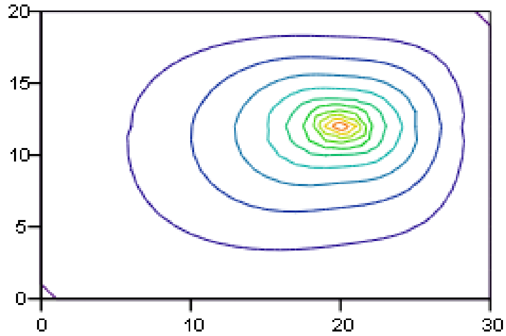
Durchbiegung $W_{i,j} := w(xp_i, yp_j)$



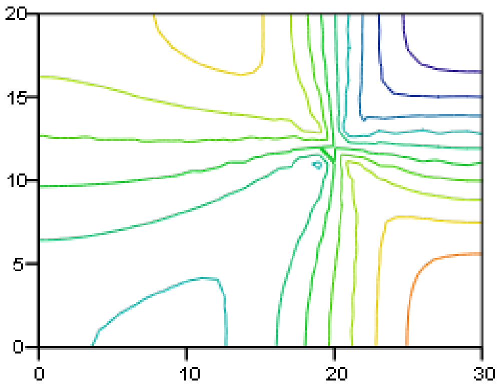


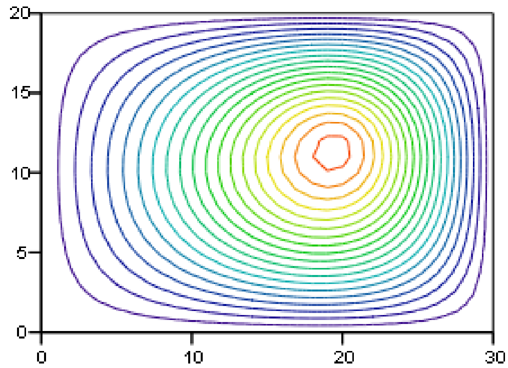
Biegemomente: $MX_{i,j} := m_x(xp_i, yp_j)$ $\quad MY_{i,j} := m_y(xp_i, yp_j)$





Bördelmoment $MXY_{i,j} := m_{xy}(xp_i, yp_j)$





Spezielle Werte:

Extremwerte:

$\min(W) = 0\,\mathrm{m}$ $\quad \max(W) = 1.947 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$

$\min(MX) = -4.89 \cdot \mathrm{kN}$ $\quad \max(MX) = 786.732 \cdot \mathrm{kN}$

$\min(MY) = -6.979 \times 10^{-14} \cdot \mathrm{kN}$ $\quad \max(MY) = 878.408 \cdot \mathrm{kN}$

$\min(MXY) = -179.882 \cdot \mathrm{kN}$ $\quad \max(MXY) = 140.168 \cdot \mathrm{kN}$

Plattenmitte:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 1.587 \cdot \mathrm{mm}$$

$$m_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 135.564 \cdot \mathrm{kN} \qquad m_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 290.773 \cdot \mathrm{kN} \qquad m_{xy}(0 \cdot \mathrm{m}, 0 \cdot \mathrm{m}) = -61.226 \cdot \mathrm{kN}$$

Sonstige:

$$m_{xy}\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right) = -54.03 \cdot kN \qquad m_{xy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = -36.282 \cdot kN$$

Mit der mathcad-Rechnung kann auch belegt werden, dass die Konvergenz der Schnittmomente (und damit der Spannungen) wegen der zweifachen Differenziation - wie erwartet - schlechter ist.