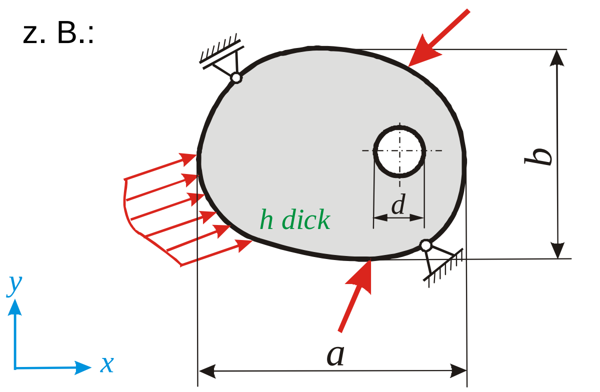
B Flächentragwerke

Flächentragwerk – Tragwerkselement, dessen eine Abmessung (Dicke) sehr klein ist gegenüber den restlichen Abmessungen

1. Scheiben

Scheibe – *ebenes* Flächentragwerk, das nur *in* der Scheibenebene belastet wird
Randbedingungen (Kräfte und Verschiebungen) wirken nur *in* der Scheibenebene
➔ Behandlung im ESZ

z. B.:



Rotationssymmetrisch belastete Kreis(ring)scheiben s. Grundstufe

1.1 AIRYsche Spannungsfunktion

(George Airy, 1801-1892)

1.1.1 Formulierung in kartesischen Koordinaten *x*, *y*

Von den Feldgleichungen werden zunächst die beiden Gleichgewichtsbedingungen (1.5) ohne Volumenkräfte

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \tau_{yx,y} &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} &= 0\end{aligned} \qquad (2.1)$$

aufgeschrieben.
Die erste Gleichgewichtsbedingung wird nach *x*, die zweite nach *y* differenziert.
Beide Ergebnisse werden addiert und die Summe nach $2\,\tau_{xy,xy}$ aufgelöst:

$$2\,\tau_{xy,xy} = -\left(\sigma_{xx,xx} + \sigma_{yy,yy}\right) \quad .$$

Anschließend wird in die erste Kompatibilitätsbedingung (1.16) das Stoffgesetz (1.17) eingesetzt:

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \gamma_{xy,xy} = \frac{1}{E}\left[\left(\sigma_{xx} - \nu\,\sigma_{yy}\right)_{,yy} + \left(\sigma_{yy} - \nu\,\sigma_{xx}\right)_{,xx} - 2\left(1+\nu\right)\tau_{xy,xy}\right] = 0$$

$$\sigma_{xx,yy} - \nu\,\sigma_{yy,yy} + \sigma_{yy,xx} - \nu\,\sigma_{xx,xx} - 2\left(1+\nu\right)\tau_{xy,xy} = 0$$

Mit dem $2\,\tau_{xy,xy}$ aus dem ersten Schritt wird daraus:

$$\sigma_{xx,yy} - \nu\,\sigma_{yy,yy} + \sigma_{yy,xx} - \nu\,\sigma_{xx,xx} + \left(1+\nu\right)\left(\sigma_{xx,xx} + \sigma_{yy,yy}\right) = 0$$

$$\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)_{,xx} + \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)_{,yy} = 0 \quad .$$

Das Ergebnis ist eine Potenzialgleichung für die Spannungssumme $\Phi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$:

$$\Delta\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) = \Delta\Phi = 0$$ Δ LAPLACE-Operator [2/1] (2.2)
(Pierre Simon Laplace, 1749 - 1827)

Das Differenzialgleichungssystem mit (2.1) und (2.2) kann reduziert werden über den Ansatz:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F(x,y)_{,yy} \\ \sigma_{yy} &= F(x,y)_{,xx} \\ \tau_{xy} &= -F(x,y)_{,xy} \end{aligned} \quad .$$

$F(x,y)$ AIRYsche Spannungsfunktion (2.3)

Mit diesem folgt

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta F = \Phi$$

und damit aus (2.2) endlich

$$\Delta\Delta F = F_{,xxxx} + 2\,F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = 0 \quad .$$ Bipotenzialgleichung (LAPLACEsche Dgl.) (2.4)

Die Bipotenzialgleichung ist vom gewählten Koordinatensystem unabhängig.
Es ist nur der LAPLACE-Operator im jeweiligen Koordinatensystem zu benutzen.

Lösungen:
Eine einzelne Lösung für $F(x,y)$ lässt sich nicht angeben. Prinzipiell können Lösungen der Bipotenzialgleichung über Lösungen der Potenzialgleichung gefunden werden:

- Lösungen der Potenzialgleichung $\Delta\Phi = 0,$ d.h. $F = \Phi$

  Allgemein gilt: $\Phi = \mathrm{Re}\left(x \pm iy\right)^n$

  $\Phi = \mathrm{Im}\left(x \pm iy\right)^n$ $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

  Verknüpfungen mit Φ
  z. B.: $F = x\Phi$ $\quad F = y\Phi$ $\quad F = \left(x^2 + y^2\right)\Phi$ $\quad F = \Phi_{,x}x + \Phi_{,y}y$ $\quad F = \Phi_{,y}x - \Phi_{,x}y$

  $F = \cos nx \cosh ny$ $\quad F = \sin nx \cosh ny$

Zusammenfassung im so genannten Katalog:

I	$x,\ x^2,\ x^3,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ x^4-y^4,\ x^4-3x^2y^2,\ldots$ $y,\ y^2,\ y^3,\ y^2x,\ y^3x,\ y^4-3x^2y^2,\ldots$
II	$\cos nx \cosh ny,\ \sin nx \cosh ny,\ \sin nx \sinh ny,\ \sin nx\ e^{\pm ny},\ \cos nx\ e^{\pm ny},\ \cos ny\ e^{\pm nx}$ $\cos ny \cosh nx,\ldots \quad$ für $n = 1, 2, 3,\ldots$
III	$x \cos nx \cosh ny,\ x \cos ny \cosh nx,\ x\ e^{\pm ny} \cos nx,\ x\ e^{\pm ny} \sin nx$ $y \cos nx \cosh ny,\ y \cos ny \cosh nx,\ldots \quad$ für $n = 1, 2, 3,\ldots$

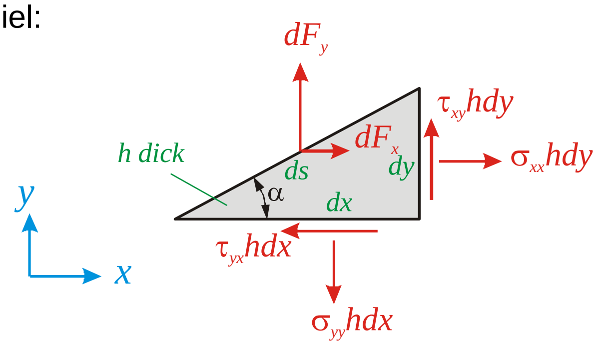
Die Auswahl der Lösung hängt von den zu erfüllenden Randbedingungen ab.

Randbedingungen

Randbedingungen - Aussagen zu Spannungen (Kräften) und/oder Verschiebungen an den Rändern

Anzahl: 2 je Rand

Beispiel:



Kräftegleichgewichtsbedingungen am Randelement:

$$\rightarrow:\qquad dF_x + \sigma_{xx}\ h\ dy - \tau_{yx}\ h\ dx = 0$$

$$\uparrow:\qquad dF_y + \tau_{xy}\ h\ dy - \sigma_{yy}\ h\ dx = 0 \quad .$$

Einsetzen der Spannungsfunktion nach (2.3) führt auf:

$$dF_x = h\,(-F_{,yy}\ dy - F_{,yx}\ dx) = -h\ dF_{,y}$$

$$dF_y = h\,(F_{,xy}\ dy + F_{,xx}\ dx) = h\ dF_{,x} \quad .$$

Integration zwischen den Randpunkten A und B:

$$F_x^{AB} = -h \int_{(A)}^{(B)} dF_{,y} = h\left(F_{,y}^{A} - F_{,y}^{B}\right)$$

$$F_y^{AB} = h \int_{(A)}^{(B)} dF_{,x} = h\left(F_{,x}^{B} - F_{,x}^{A}\right) \quad .$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen genügt also die Kenntnis der ersten Ableitungen der Spannungsfunktion an den Randpunkten A und B.

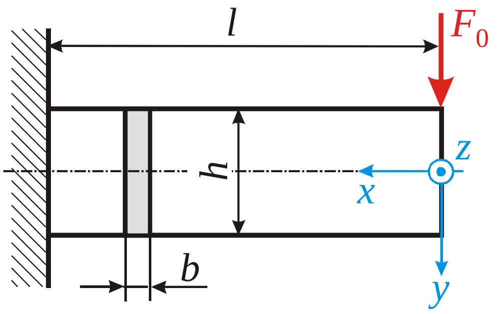
Ist der Rand **kräftefrei**, dann folgt daraus:

$$F_{,x}^{A} = F_{,x}^{B} = F_{,x} = \text{konst.}$$
$$F_{,y}^{A} = F_{,y}^{B} = F_{,y} = \text{konst.}$$

Da nach (2.3) die Spannungen aus den zweiten Ableitungen folgen, können die Konstanten null gesetzt werden:

$$F_{,x} = 0$$
$$F_{,y} = 0 \quad .$$

<u>Beispiel</u>: Scheibenträger unter Querkraft



Geg.: b, h, l, F_0

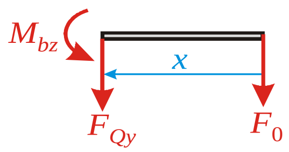
Ges.: 1. Spannungsfunktion, ausgehend von der elementaren Theorie (Überprüfung: $\Delta\Delta F = 0$, Erfüllung der Randbedingungen)

2. Verschiebungen

Elementare Theorie (Balken):

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{bz}}{I_{zz}}\, y$$

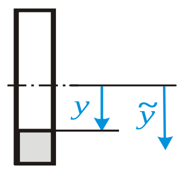
$$\tau_{xy} = \frac{F_{Qy}\, S_z}{I_{zz}\, b}$$



mit: $M_{bz} = F_0\, x$

$F_{Qy} = -F_0$

$$S_z = \int_y^{\frac{h}{2}} \tilde{y}\, b\, d\tilde{y} = \frac{b}{2}\tilde{y}^2 \Big|_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



$$I_{zz} = \frac{b\, h^3}{12}$$

$$\sigma_{xx} = -12\frac{F_0}{b\, h^3}\, x\, y$$

$$\tau_{xy} = -6\frac{F_0}{b\, h}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) \quad .$$

Aus σ_{xx} wird ein Ansatz für die Spannungsfunktion gewonnen:

$$\sigma_{xx} = F_{,yy} = -12\frac{F_0}{b\, h^3}\, x\, y \qquad | \text{ Integration über } y$$

$$F_{,y} = -6\frac{F_0}{b\, h^3}\, x\, y^2 + f(x) \qquad | \text{ Differenziation nach } x$$

$$F_{,yx} = -\tau_{xy} = -6\frac{F_0}{b\, h}\frac{y^2}{h^2} + f'(x) \quad .$$

Das erhaltene τ_{xy} wird mit dem der elementaren Theorie (s. o.) verglichen und führt auf:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{F_0}{b\, h} \qquad | \text{ Integration über } x$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\frac{F_0}{b\,h}\,x + c \qquad .$$

Damit wird:

$$F_{,y} = -6\,\frac{F_0}{b\,h}\,x\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4}\right) + c \qquad \Big|\ \text{Integration über } y$$

$$\underline{F = -6\,\frac{F_0}{b}\,x\left(\frac{1}{3}\frac{y^3}{h^3} - \frac{1}{4}\frac{y}{h}\right) + g(x)} \quad .$$

Da c keine Spannungen liefert, wurde bereits von der Definition $c = 0$ Gebrauch gemacht.

Die Spannungsfunktion muss nachstehende (Spannungs-)Randbedingungen erfüllen:

1. Rand $(x\,;\,y = \frac{h}{2})$: $\quad \sigma_{yy} = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$
2. Rand $(x\,;\,y = -\frac{h}{2})$: $\quad \sigma_{yy} = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$
3. Rand $(0\,;\,y)$: $\quad \sigma_{xx} = 0$.

Die Bedingungen an den ersten beiden Rändern führen mit:

$$\sigma_{yy}\left(x\,;\pm\frac{h}{2}\right) = F_{,xx}\left(x\,;\pm\frac{h}{2}\right) = 0$$

auf:

$$g_{,xx}(x) = 0 \quad .$$

Da $g(x) = k_1 + k_2\,x$ keine Spannungen liefert, wird definiert: $g(x)=0$.

Die Spannungsfunktion lautet damit endgültig:

$$\underline{F = -6\,\frac{F_0}{b\,h^3}\left(\frac{1}{3}x\,y^3 - \frac{h^2}{4}\,x\,y\right)} \qquad .$$

Die Spannungen sind:

$$\sigma_{xx} = F_{,yy} = -12\,\frac{F_0}{b\,h^3}\,x\,y \qquad \text{(s. elementare Theorie)}$$

$$\sigma_{yy} = F_{,xx} = 0$$

$$\tau_{xy} = -F_{,xy} = -6\,\frac{F_0}{b\,h}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) \qquad \text{(s. elementare Theorie)} \ .$$

Kontrollen:

- Erfüllung der Dgl. $\Delta\Delta F = 0$:

$$F_{,xxxx} = 0$$
$$F_{,yyyy} = 0$$
$$F_{,xxyy} = 0$$

  Damit erfüllt die gewählte Spannungsfunktion die Dgl.

- Die noch nicht benutzten Randbedingungen werden ebenfalls erfüllt.

- Außerdem gilt:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, b\, dy = -6\, F_0 \left(\frac{1}{4} \frac{y}{h} - \frac{1}{3} \frac{y^3}{h^3} \right) \Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = -F_0$$

Die Dehnungen:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\, \sigma_{yy}\right) = \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\underbrace{12 \frac{F_0}{E\, b\, h^3}}_{B} x\, y \quad = -B\, x\, y$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y,y} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\, \sigma_{xx}\right) = -\frac{\nu\, \sigma_{xx}}{E} \qquad = \nu\, B\, x\, y$$

werden über x bzw. y integriert:

$$u_x = -\frac{B}{2} x^2\, y + \varphi(y)$$
$$u_y = \nu \frac{B}{2} x\, y^2 + \psi(x) \qquad .$$

Die erhaltenen Ergebnisse werden nach y bzw. x differenziert und danach in die Beziehung für die Schubverzerrung:

$$\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$= -6 \frac{F_0\, 2\left(1+\nu\right)}{b\, h\, E}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) = -\left(1+\nu\right) B\, h^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) = -\frac{E}{2\,G} B\, h^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

eingesetzt. Das Ergebnis lautet:

$$-\frac{E}{2G} B\, h^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) = -\frac{B}{2} x^2 + \varphi'(y) + \nu \frac{B}{2} y^2 + \psi'(x)$$

$$-\frac{E}{G}\frac{h^2}{8} B = \underbrace{-\frac{B}{2} x^2 + \psi'(x)}_{d=\text{konst.}} \underbrace{- \frac{E\, B}{2\,G} y^2 + \frac{\nu}{2} B\, y^2 + \varphi'(y)}_{e=\text{konst.}} \qquad .$$

Aus der Bedingung, dass d und e nur konstante Werte liefern dürfen, werden die Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(y)$ bestimmt:

$$\psi'(x) = d + \frac{B}{2} x^2 \qquad | \text{ Integration über } x$$

$$\psi(x) = d\, x + \frac{B}{6} x^3 + m$$

$$\varphi'(y) = e + \frac{E\,B}{2\,G} y^2 - \frac{\nu}{2} B\, y^2 \qquad | \text{ Integration über } y$$

$$\varphi(y) = e\, y + \frac{E\,B}{6\,G} y^3 - \frac{\nu}{6} B\, y^3 + n \qquad .$$

Damit werden die Verschiebungen:

$$u_x = -\frac{B}{2} x^2\, y + \frac{E\,B}{6\,G} y^3 - \frac{\nu\,B}{6} y^3 + e\, y + n$$

$$u_y = \frac{\nu\,B}{2} x\, y^2 + \frac{B}{6} x^3 + d\, x + m \qquad .$$

Die verbliebenen 4 Konstanten werden über die geometrischen Randbedingungen

$$u_x(l\,;0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n = 0$$

$$u_y(l\,;0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B}{6} l^3 + d\, l + m = 0$$

$$u_{y,x}(l\,;0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{B}{2} l^2 + d = 0$$

und den Zusammenhang

$$-\frac{E}{G}\frac{h^2}{8} B = d + e$$

bestimmt:

$$d = -\frac{B}{2} l^2$$

$$m = -\frac{B}{6} l^3 + \frac{B}{2} l^3 = \frac{B}{3} l^3$$

$$e = -\frac{E\,B}{2\,G}\frac{h^2}{4} + \frac{B}{2} l^2 \qquad .$$

Die Ergebnisse für die Funktionen der Verschiebungen sind:

$$\underline{u_x = 2\,\frac{F_0}{E\,b\,h^3}\left[-3\,x^2\, y + (2+\nu)\, y^3 + 3\left(l^2 - \frac{1+\nu}{2} h^2\right) y\right]}$$

$$\underline{u_y = 2\,\frac{F_0}{E\,b\,h^3}\left(3\,\nu\, x^2\, y + x^3 - 3\,l^2\, x + 2\,l^3\right)} \qquad .$$

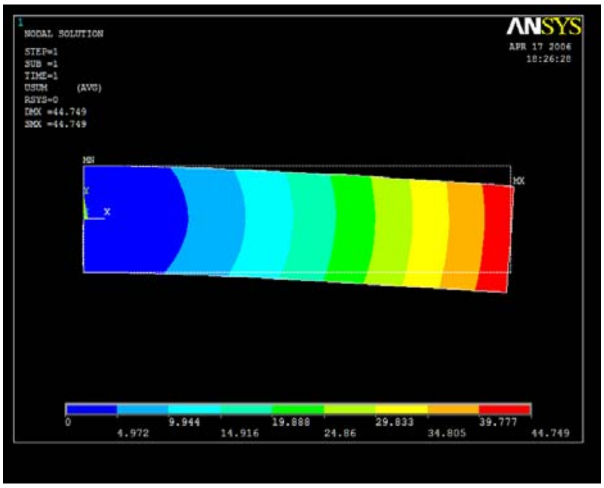
Für $y = 0$ können die Werte mit denen aus der elementaren Biegetheorie vergli-chen werden:

$$\underline{u_y(x;0) = 2\,\frac{F_0\,l^3}{E\,b\,h^3}\left(\frac{x^3}{l^3} - 3\,\frac{x}{l} + 2\right)} \qquad \underline{u_x(x;0) = 0}$$

$$\underline{u_y(0;0) = 4\,\frac{F_0\,l^3}{E\,b\,h^3} = \frac{F_0\,l^3}{3\,E\,I_{zz}}} \quad . \qquad \left(\text{s. o.: } I_{zz} = \frac{b\,h^3}{12}\right)$$

Es liegt offensichtlich Übereinstimung vor.

Zum Vergleich: Ergebnisplot für die mit ANSYS erhaltenen Gesamtverschiebungen



1.1.2 Formulierung in Polarkoordinaten *r*, φ

Mit Hilfe der **Transformationsbeziehungen** [2/2] zwischen kartesischen (x, y) und Polarkoordinaten $(r,\ \varphi)$ können die Ableitungen der Spannungsfunktion in Polarko-ordinaten geschrieben werden:

$$F_{,x} = F_{,r}\,r_{,x} + F_{,\varphi}\,\varphi_{,x} = F_{,r}\cos\varphi - F_{,\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$F_{,xx} = \left(F_{,r}\cos\varphi - F_{,\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\right)_{,r}\cos\varphi - \left(F_{,r}\cos\varphi - F_{,\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r}\right)_{,\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$= F_{,rr}\cos^2\varphi - 2\,F_{,r\varphi}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 2\,F_{,\varphi}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + F_{,r}\,\frac{\sin^2\varphi}{r} + F_{,\varphi\varphi}\,\frac{\sin^2\varphi}{r^2}$$

und analog:

$$F_{,yy} = F_{,rr}\sin^2\varphi + 2\,F_{,r\varphi}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2\,F_{,\varphi}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + F_{,r}\,\frac{\cos^2\varphi}{r} + F_{,\varphi\varphi}\,\frac{\cos^2\varphi}{r^2} \quad .$$

Daraus ergibt sich die Potenzialgleichung:

$$\Delta F = F_{,xx} + F_{,yy} = F_{,rr} + \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\varphi\varphi} \quad .$$

Der LAPLACE-Operator für Polarkoordinaten hat also die Form:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad .$$

Die **Bipotenzialgleichung** lautet damit:

$$\Delta\Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) = 0 \quad . \tag{2.5}$$

Lösungen der Bipotenzialgleichung:

Katalog:

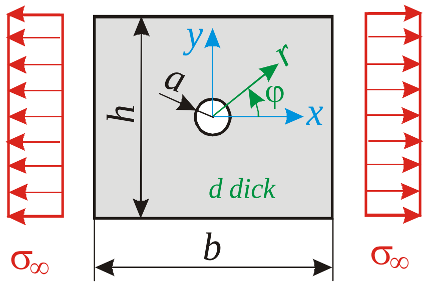
I	$\ln r,\ r^2,\ r^2 \ln r$ $r\cos\varphi,\ \frac{1}{r}\cos\varphi,\ r^3\cos\varphi,\ r\ln r\cos\varphi,$ analog mit $\sin\varphi$ $r^n\cos n\varphi,\ r^{-n}\cos n\varphi,\ r^{n+2}\cos n\varphi,\ r^{-n+2}\cos n\varphi,$ analog mit $\sin\varphi$ für $n \geq 2$
II	$\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi$ $r\,\varphi\cos\varphi,\ r\,\varphi\sin\varphi$ $r^n\cos(n-2)\varphi,\ r^n\sin(n-2)\varphi$ für $n \geq 3$
III	$\varphi\ln r,\ r^2\varphi,\ r^2\varphi\ln r$ $r\ln r\,\varphi\cos\varphi,\ r\ln r\,\varphi\sin\varphi$ $\cos(n\ln r)\cosh n\varphi,\ r^2\cos(n\ln r)\cosh n\varphi,\ \sin(n\ln r)\sinh n\varphi,\ r^2\cos(n\ln r)\sinh n\varphi$

Formulierung der **Spannungen** mit den Ableitungen der Spannungsfunktion:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\varphi\varphi} \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= F_{,rr} \\
\tau_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2}F_{,\varphi} - \frac{1}{r}F_{,r\varphi} = -\left(\frac{1}{r}F_{,\varphi}\right)_{,r} \quad .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Auswahl der Lösung hängt wieder von den zu erfüllenden Randbedingungen ab.

<u>Beispiel</u>: Gelochte Scheibe unter Zug



Geg.: a, b, h, d [$(a, d) << (b, h)$], σ_∞

Ges.: Spannungsverteilung σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$
(speziell in Lochnähe)

In hinreichender Entfernung vom Loch kann ein homogener Zugspannungszustand vorausgesetzt werden, d. h. es gilt:

$$\sigma_{xx\,\infty} = \sigma_\infty \qquad \sigma_{yy\,\infty} = 0 \qquad \tau_{xy\,\infty} = 0 \quad .$$

Dieser kann durch folgende Spannungsfunktion beschrieben werden:

$$F_\infty = \frac{\sigma_\infty}{2}\, y^2 = \frac{\sigma_\infty}{2}\, r^2 \sin^2\varphi = \frac{\sigma_\infty}{4}\, r^2 \left(1 - \cos 2\varphi\right) \ .$$

(unter Benutzung von [1/2])

Diesem Ansatz werden weitere ähnliche und in radialer Richtung schnell abklingende Terme überlagert.
Die zusätzlichen Terme sollen den Spannungszustand in Lochnähe beschreiben:

$$F\left(r,\varphi\right) = \sum_{n=0,2} A_n\, r^{\lambda_n} \cos n\varphi \quad .$$

Der Ansatz wird in die Bipotenzialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}\Delta F &= A_n \left[\lambda_n\left(\lambda_n - 1\right) r^{\lambda_n - 2} + \lambda_n\, r^{\lambda_n - 2} - n^2\, r^{\lambda_n - 2}\right] \cos n\varphi \\ &= A_n \left[\lambda_n{}^2 - n^2\right] r^{\lambda_n - 2} \cos n\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Delta F &= A_n \left[\lambda_n{}^2 - n^2\right]\left[\left(\lambda_n - 2\right)\left(\lambda_n - 3\right) r^{\lambda_n - 4} + \left(\lambda_n - 2\right) r^{\lambda_n - 4} - n^2 r^{\lambda_n - 4}\right] \cos n\varphi \\ &= A_n \left[\lambda_n{}^2 - n^2\right]\left[\lambda_n{}^2 - 4\lambda_n + 4 - n^2\right] r^{\lambda_n - 4} \cos n\varphi = 0 \quad .\end{aligned}$$

Die Lösungen sind:

für $n = 0$: $\lambda_{01,02} = 0$ $\qquad \lambda_{03,04} = 2$

für $n = 2$: $\lambda_{21,22} = \pm 2$ $\qquad \lambda_{23} = 4$ $\qquad \lambda_{24} = 0$.

Die Spannungsfunktion lautet damit:

$$F = A_0 + B_0 \ln\frac{r}{a} + \frac{\sigma_\infty}{4}\, r^2 + D_0\, r^2 \ln\frac{r}{a} + \left(-\frac{\sigma_\infty}{4}\, r^2 + B_2\, \frac{1}{r^2} + C_2\, r^4 + D_2\right) \cos 2\varphi \quad .$$

Da A_0 keine Spannung bringt und D_0 und C_2 Spannungen liefern, die in r nicht abklingen, wird definiert:

$$A_0 = D_0 = C_2 = 0 \quad .$$

Am Lochrand sind die Bedingungen

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=a} = \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi}\Bigg|_{r=a} = 0$$

$$\tau_{r\varphi}\Big|_{r=a} = \frac{1}{r^2} F_{,\varphi} - \frac{1}{r} F_{,r\varphi}\Bigg|_{r=a} = 0$$

zu erfüllen.

Mit den erforderlichen Ableitungen der Spannungsfunktion:

$$F_{,r} = \frac{1}{r} B_0 + \frac{\sigma_\infty}{2} r + \left(-\frac{\sigma_\infty}{2} r - 2\, B_2 \frac{1}{r^3} \right) \cos 2\varphi$$

$$F_{,\varphi} = \left(-\frac{\sigma_\infty}{4} r^2 + B_2 \frac{1}{r^2} + D_2 \right) (-2 \sin 2\varphi)$$

$$F_{,\varphi\varphi} = \left(-\frac{\sigma_\infty}{4} r^2 + B_2 \frac{1}{r^2} + D_2 \right) (-4 \cos 2\varphi)$$

$$F_{,r\varphi} = \left(-\frac{\sigma_\infty}{2} r - 2\, B_2 \frac{1}{r^3} \right) (-2 \sin 2\varphi) \quad .$$

werden die Randbedingungen formuliert:

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=a} = \frac{1}{a^2} B_0 + \frac{\sigma_\infty}{2} + \left(-\frac{\sigma_\infty}{2} - 2\, B_2 \frac{1}{a^4} + \sigma_\infty - 4\, B_2 \frac{1}{a^4} - 4\, D_2 \frac{1}{a^2} \right) \cos 2\varphi = 0$$

$$\tau_{r\varphi}\Big|_{r=a} = \left(\frac{\sigma_\infty}{2} - 2\, B_2 \frac{1}{a^4} - 2\, D_2 \frac{1}{a^2} - \sigma_\infty - 4\, B_2 \frac{1}{a^4} \right) \sin 2\varphi = 0 \quad .$$

Daraus folgen die Bestimmungsgleichungen für $B_0,\ B_2,\ D_2$:

$$\frac{B_0}{a^2} + \frac{\sigma_\infty}{2} = 0$$

$$\frac{\sigma_\infty}{2} a^4 - 6\, B_2 - 4\, D_2\, a^2 = 0$$

$$-\frac{\sigma_\infty}{2} a^4 - 6\, B_2 - 2\, D_2\, a^2 = 0$$

mit den Lösungen:

$$B_0 = -\frac{\sigma_\infty}{2} a^2 \qquad B_2 = -\frac{\sigma_\infty}{4} a^4 \qquad D_2 = \frac{\sigma_\infty}{2} a^2 \quad .$$

Damit lautet die AIRYsche Spannungsfunktion:

$$F(r,\varphi)=\left[-\ln\frac{r}{a}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}+\left(1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right]\frac{\sigma_\infty\, a^2}{2}$$

Die Beziehungen für die Spannungen können somit angegeben werden:

$$\sigma_{rr}=\left[1-\frac{a^2}{r^2}+\left(1-4\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right]\frac{\sigma_\infty}{2}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\left[1+\frac{a^2}{r^2}-\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right]\frac{\sigma_\infty}{2}$$

$$\tau_{r\varphi}=\left(-1-2\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi\;\frac{\sigma_\infty}{2}\quad .$$

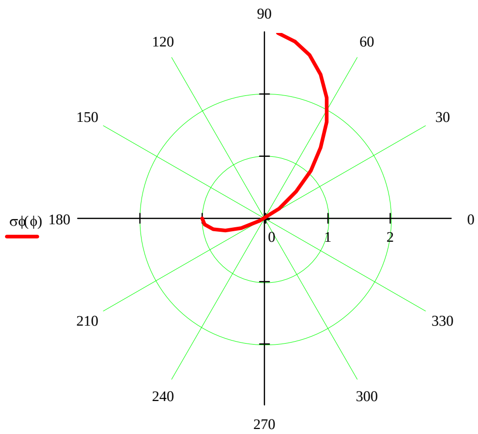
Für den **Lochrand** $(r=a)$ gilt folglich:

$$\sigma_{rr}=\tau_{r\varphi}=0$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=(1-2\cos 2\varphi)\,\sigma_\infty$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)=3\,\sigma_\infty\quad .$$

Das entspricht einem Kerbfaktor von 3 !



Darstellung für $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$!

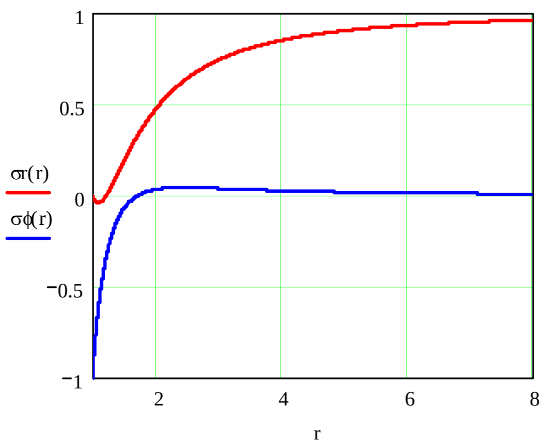
Die Spannungsverläufe in **radialer Richtung** lauten für die Winkel:

- $\varphi=0$:

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{2}\left(2-5\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right)\sigma_\infty$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r^2}-3\frac{a^4}{r^4}\right)\sigma_\infty$$

$$\tau_{r\varphi}=0$$

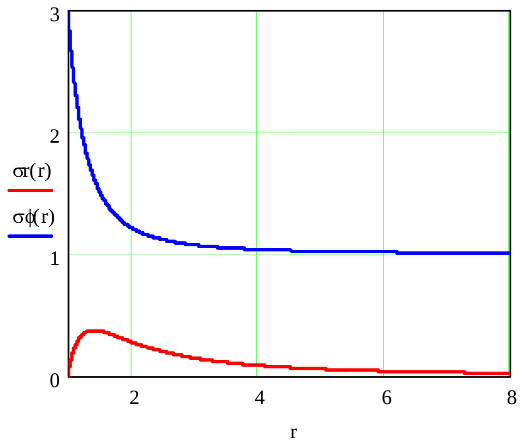


- $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\sigma_{rr} = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4}\right)\sigma_\infty$$

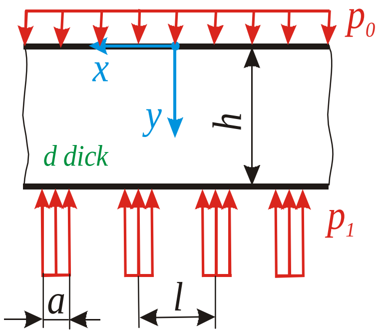
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sigma_\infty$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad .$$



1.2 Periodische Randlasten

<u>Beispiel:</u> Ein Scheibenstreifen wird durch eine periodische Gleichgewichtsgruppe belastet.

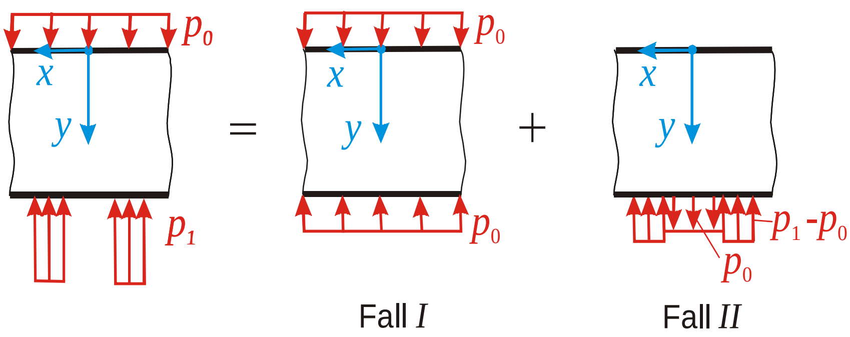


Geg.: p_0, (p_1,) h, l, a, d

Ges.: σ_{xx} für $x = 0$ und $x = l/2$

1. allgemein
2. für $\frac{a}{l} = \frac{1}{8}$; $\frac{h}{l} = 1$

Zerlegung der Randlasten:



Fall *I*

Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0: \\ y = h: \end{array}\right\} \qquad \sigma_{yy\,I} = -p_0 \qquad \tau_{xy\,I} = 0$$

Spannungsfunktion:

$$F_I = -\frac{p_0\, x^2}{2} \quad .$$

Fall *II*

Aus Gleichgewichtsgründen berechnet sich p_1:

$$p_1 = \frac{l}{a}\, p_0 \quad .$$

Benutzung einer periodisch fortgesetzten Lösung der Periodenlänge l.
Eventuelle Randstörungen der endlich langen Scheibe sind ohne Einfluss auf die Spannungen bei $-\frac{l}{2} \le x \le \frac{l}{2}$.

FOURIERreihenentwicklung für die **Belastung** $p(x)$:

Wahl eines FOURIER-Reihenansatzes (s. [2/4]), der die Randbedingungen erfüllt:

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\,2\,\pi\,x}{l} + b_n \sin \frac{n\,2\,\pi\,x}{l} \right)$$

mit:

$$a_0 = 0 \qquad\qquad b_n = 0$$

$$a_n = 2\,\frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} p(x) \cos \alpha_n x\, dx \qquad \text{und:} \qquad \alpha_n = \frac{n\,2\,\pi}{l} \quad .$$

In diese Gleichung wird $p(x)$ mit

$$p(x) = \begin{cases} p_0 & \text{für} \quad 0 \le x \le \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \\ -\,p_0 \left(\frac{l}{a} - 1 \right) & \text{für} \quad \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \le x \le \frac{l}{2} \end{cases}$$

eingesetzt. Anschließend erfolgt die Integration über x.

Man erhält die FOURIER-Koeffizienten

$$a_n = \frac{4\,p_0}{\alpha_n\,a} \sin \frac{\alpha_n}{2} (l - a) \quad .$$

Die entwickelte Belastungsfunktion kann damit geschrieben werden:

$$p(x) = \frac{4\,p_0}{a} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha_n}{2} (l-a)}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \quad .$$

Für die **Spannungsfunktion** wird ein Produktansatz mit analoger x-Abhängigkeit gewählt:

$$F_{II}(x, y) = \sum_{n=1,2,...}^{\infty} f_n(y) \cos \alpha_n x \quad .$$

Dieser wird zunächst in die Bipotenzialgleichung $\Delta\Delta F_{II} = 0$ eingesetzt und liefert für jedes Reihenglied n:

$$\left(f_{n,yyyy} - 2\,\alpha_n^2\, f_{n,yy} + \alpha_n^4\, f_n \right) \cos \alpha_n x = 0 \quad .$$

Die Dgl. für die $f_n(y)$ hat nach [2/3] die Lösung:

$$f_n = A_n \cosh \alpha_n y + B_n \sinh \alpha_n y + C_n\, \alpha_n y \cosh \alpha_n y + D_n\, \alpha_n y \sinh \alpha_n y \quad .$$

Die Spannungsfunktion wird zu:

$$F_{II} = \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \left(A_n \cosh \alpha_n y + B_n \sinh \alpha_n y + C_n\, \alpha_n y \cosh \alpha_n y + D_n\, \alpha_n y \sinh \alpha_n y \right) \cos \alpha_n x \quad .$$

Daraus folgen die Spannungen:

$$\sigma_{xx\,II} = F_{II,yy}$$

$$= \sum_{n=1,2,..}^{\infty} \alpha_n^2 \left[\left(A_n + C_n \alpha_n y + 2D_n \right) \cosh \alpha_n y + \left(B_n + D_n \alpha_n y + 2C_n \right) \sinh \alpha_n y \right] \cos \alpha_n x$$

$$\sigma_{yy\,II} = F_{II,xx}$$

$$= -\sum_{n=1,2,..}^{\infty} \alpha_n^2 \left[\left(A_n + C_n \alpha_n y \right) \cosh \alpha_n y + \left(B_n + D_n \alpha_n y \right) \sinh \alpha_n y \right] \cos \alpha_n x$$

$$\tau_{xy\,II} = -F_{II,xy}$$

$$= \sum_{n=1,2,..}^{\infty} \alpha_n^2 \left[\left(A_n + C_n \alpha_n y + D_n \right) \sinh \alpha_n y + \left(B_n + D_n \alpha_n y + C_n \right) \cosh \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x \quad .$$

Die Integrationskonstanten werden über die (Spannungs-)Randbedingungen:

$$\sigma_{yy\,II}\left(y=0\right)=0 \qquad \sigma_{yy\,II}\left(y=h\right)=p(x)=F_{II,xx}$$

$$\tau_{xy\,II}\left(y=0\right)=0 \qquad \tau_{xy\,II}\left(y=h\right)=0$$

berechnet zu:

$$A_n = 0$$

$$C_n = -B_n = \frac{4\,p_0}{a\,\alpha_n^3} \frac{\left(\sinh \alpha_n h + \alpha_n h \cosh \alpha_n h\right) \sin \frac{\alpha_n}{2}\left(l-a\right)}{\sinh^2 \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2}$$

$$D_n = -\frac{4\,p_0\,h}{a\,\alpha_n^2} \frac{\sinh \alpha_n h \sin \frac{\alpha_n}{2}\left(l-a\right)}{\sinh^2 \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2} \quad .$$

Damit können die Spannungen für den Fall II berechnet werden.

Sie werden anschließend mit denen aus Fall I zum Endergebnis überlagert:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx\,I} + \sigma_{xx\,II}$$

$$= \frac{4p_0}{a} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{\alpha_n}{2}\left(l-a\right)\right] \cos \alpha_n x}{\alpha_n \left(\sinh^2 \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2\right)} \left\{ \begin{aligned} &-\alpha_n \left(h-y\right) \sinh \alpha_n h \cosh \alpha_n y - \alpha_n h \sinh\left[\alpha_n \left(h-y\right)\right] \\ &+\alpha_n^2 h\, y \cosh\left[\alpha_n \left(h-y\right)\right] + \sinh \alpha_n h \sinh \alpha_n y \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy\,I} + \sigma_{yy\,II}$$

$$= -p_0 + \frac{4p_0}{a} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{\alpha_n}{2}\left(l-a\right)\right] \cos \alpha_n x}{\alpha_n \left(\sinh^2 \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2\right)} \left\{ \begin{aligned} &\left(\alpha_n h \cosh \alpha_n h + \sinh \alpha_n h\right) \sinh \alpha_n h \\ &-\alpha_n^2 h y \cosh\left[\alpha_n \left(h-y\right)\right] - \alpha_n\, y \sinh \alpha_n h \cosh \alpha_n y \end{aligned} \right\}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy\,I} + \tau_{xy\,II}$$

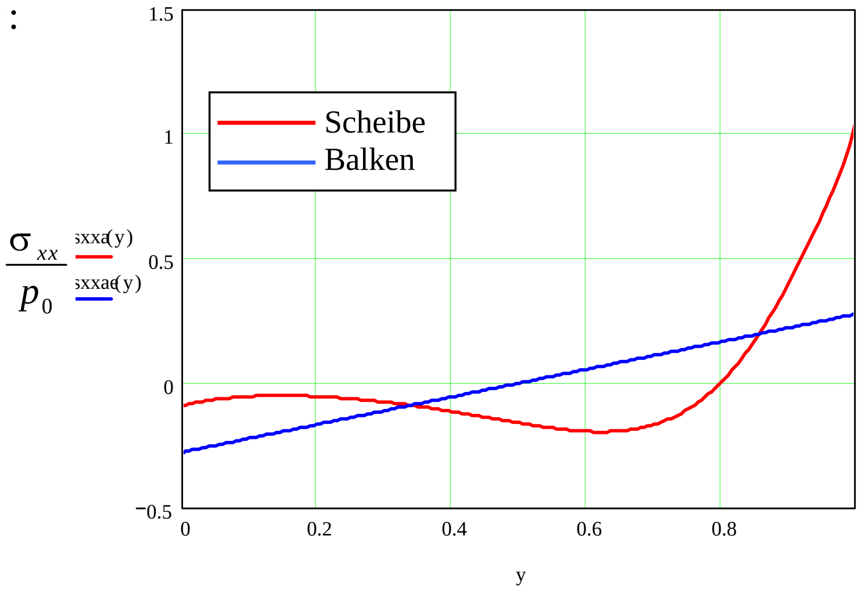
$$= \frac{4p_0}{a} \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{\alpha_n}{2}\left(l-a\right)\right] \cos \alpha_n x}{\alpha_n \left(\sinh^2 \alpha_n h - \alpha_n^2\, h^2\right)} \left\{ \begin{aligned} &-\alpha_n \left(h-y\right) \sinh \alpha_n h \sinh \alpha_n y \\ &-\alpha_n^2\, h\, y \sinh\left[\alpha_n \left(h-y\right)\right] \end{aligned} \right\}$$

Für σ_{xx} und die gegebenen Geometrieverhältnisse erhält man folgende Beziehung:

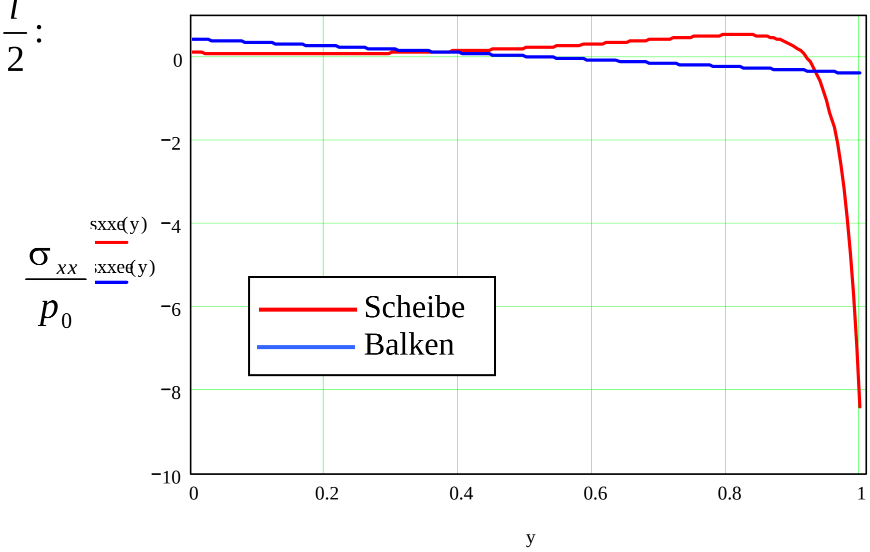
$$\frac{\sigma_{xx}}{p_0} = -32 \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{7}{16}\alpha_n l\right)\cos\alpha_n x}{\sinh^2\alpha_n l - (\alpha_n l)^2} \left\{ \begin{array}{l} \left(1-\frac{y}{l}\right)\sinh\alpha_n l \cosh\alpha_n y + \alpha_n l \sinh\left[\alpha_n l\left(1-\frac{y}{l}\right)\right] \\ -\alpha_n l \cosh\left[\alpha_n l\left(1-\frac{y}{l}\right)\right] + \frac{1}{\alpha_n l}\sinh\alpha_n l \sinh\alpha_n y \end{array} \right\}$$

Diese ist für $x = 0$ und $x = \frac{l}{2}$ in den beiden folgenden Diagrammen dargestellt:

$x = 0:$



$x = \frac{l}{2}:$



In die Diagramme wurden auch die Ergebnisse nach der *elementaren Theorie* (Balken - „Ebenbleiben der Querschnitte“) aufgenommen:

$$\sigma_{xx\,elem}\left(x;\, y = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ h \end{array}\right.\right) = 6\,\frac{M(x)}{d\,h^2} \quad .$$

Die Schnittmomente wurden dabei über den „Satz von CASTIGLIANO“ ermittelt:

$$M(0) = \frac{21}{512}\, p_0\, d\, l^2$$
$$M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{35}{512}\, p_0\, d\, l^2 \quad .$$

Spezielle Werte für $\frac{\sigma_{xx}(x,y)}{p_0}$ sind damit:

x	y	**Scheibe**	**Balken**
0	0	$-0,091$	$-0,246$
	h	$1,065$	$0,246$
$\frac{l}{2}$	0	$-0,092$	$0,410$
	h	$-8,413$	$-0,410$

Es ist ersichtlich, dass die elementare Theorie besonders am unteren Rand viel zu kleine Werte liefert.

Die Verschiebung u_x wird über die Dehnung ε_{xx} ermittelt:

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\,\sigma_{yy}\right) = \frac{1}{E}\left[\nu\, p_0 + \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \Phi_n(y)\cos\alpha_n x\right] \quad .$$

Integration über x im Bereich [0, $l/2$] führt auf:

$$u_x\left(\frac{l}{2}\right) - u_x(0) = \frac{1}{E}\left[\nu\, p_0\,\frac{l}{2} + \sum_{n=1,2,...}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}\,\Phi_n(y)\sin\frac{\alpha_n\, l}{2}\right] \quad .$$

Da

$$\sin\frac{\alpha_n\, l}{2} = \sin n\pi = 0 \quad ,$$

ergibt sich schließlich:

$$\underline{u_x\left(\frac{l}{2}\right) - u_x(0) = \frac{\nu\, p_0\, l}{2\,E} = \text{konst.}}$$