

Anhang

- [1/0] Partielle Ableitungen in Kommaschreibweise
z. B.:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = (\quad)_{,x} \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial y} = (\quad)_{,y}$$

- [1/1] EINSTEINSche Summationskonvention
Enthält ein Ausdruck (z. B. Produkt) zwei gleiche Indizes, so ist über diese zu summieren. Summationsindizes sind hier meistens: x, y, z . Diese Festlegung führt zu schlankeren und übersichtlicheren Gleichungen (beinhaltet aber auch die Gefahr, die Summation zu unterlassen).
z. B.:

$$t_{kl,k} = 0 \quad \text{mit: } (k, l) = \{x, y, z\}$$

$$t_{xx,x} + t_{yx,y} + t_{zx,z} = 0$$

- [1/2] Trigonometrische Beziehungen für doppelte Argumente

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

- [1/3] Permutationssymbol
Definition:

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2} (i-j)(j-k)(k-i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i, j, k \text{ in zyklischer Reihenfolge} \\ -1 & \text{für } i, j, k \text{ in antizyklischer Reihenfolge} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- [1/4] KRONECKERsymbol
Definition:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

- [2/1] LAPLACE-Operator

$$\Delta(\quad) = (\quad)_{,xx} + (\quad)_{,yy} \quad \text{mit: } (k, l) = \{x, y\}$$

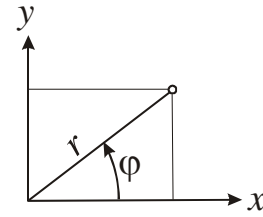
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{mit: } (k, l) = \{r, \varphi\}$$

- [2/2] Transformationsbeziehungen zwischen kartesischen (x, y) und Polarkoordinaten (r, φ) :

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

bzw.

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} ,$$



partielle Ableitungen:

$$2 r r_{,x} = 2 x \quad r_{,x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$2 r r_{,y} = 2 y \quad r_{,y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi$$

$$\varphi_{,x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\varphi_{,y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r} .$$

- [2/3] Lösung der Differentialgleichung $f_{k,yyyy} - 2 \alpha_k^2 f_{k,yy} + \alpha_k^4 f_k = 0 :$

Ansatz:

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^4 K_{ki} e^{\lambda_i y}$$

$$\text{mit: } f_{k i, y} = \lambda_i e^{\lambda_i y}$$

$$f_{k i, yy} = \lambda_i^2 e^{\lambda_i y}$$

$$f_{k i, yyy} = \lambda_i^3 e^{\lambda_i y}$$

$$f_{k i, yyyy} = \lambda_i^4 e^{\lambda_i y}$$

Einsetzen in Dgl. liefert charakteristische Gleichung:

$$(\lambda_i^4 - 2 \alpha_k^2 \lambda_i^2 + \alpha_k^4) e^{\lambda_i y} = 0$$

mit den Lösungen:

$$\lambda_i^4 - 2 \alpha_k^2 \lambda_i^2 + \alpha_k^4 = 0$$

$$\lambda_i^2 = u : \quad \lambda_i = \pm \sqrt{u} \quad (u > 0)$$

$$u^2 - 2 \alpha_k^2 u + \alpha_k^4 = 0$$

$$u_{1,2} = \alpha_k^2 \pm \sqrt{\alpha_k^4 - \alpha_k^4} = \alpha_k^2$$

$$\underline{\lambda_1 = \alpha_k}$$

$$\underline{\lambda_2 = \alpha_k}$$

$$\underline{\lambda_3 = -\alpha_k}$$

$$\underline{\lambda_4 = -\alpha_k}$$

Allgemeine Lösung der Dgl.:

$$f_k(y) = K_{k1} e^{\alpha_k y} + K_{k2} \alpha_k y e^{\alpha_k y} + K_{k3} e^{-\alpha_k y} + K_{k4} \alpha_k y e^{-\alpha_k y}$$

Ersetzen der e -Funktionen durch Hyperbelfunktionen gemäß:

$$\sinh \alpha_k y = \frac{e^{\alpha_k y} - e^{-\alpha_k y}}{2}$$

$$\cosh \alpha_k y = \frac{e^{\alpha_k y} + e^{-\alpha_k y}}{2}$$

Neue Formulierung der allgemeinen Lösung der Dgl.:

$$f_k(y) = A_k \cosh \alpha_k y + B_k \sinh \alpha_k y + C_k \alpha_k y \cosh \alpha_k y + D_k \alpha_k y \sinh \alpha_k y$$

[2/4] FOURIER-Reihe (einer periodischen Funktion)

Periodizität: $f(x + kT) = f(x)$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\tilde{y}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T}$$

T Periodenlänge

mit: $a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(x) dx$

$y(x)$ zu analysierende Funktion

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx$$

[2/5] Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$

[2/6] Satz von MOIVRE (Moivre, Abraham de 1667 – 1754)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

