

3. (Rotations-)Schalen

Schale – *gekrümmtes* Flächentragwerk mit *beliebiger* Belastung

Rotationsschale – Meridiankurve (Erzeugende) ist von Drehwinkel um feste Achse unabhängig

Voraussetzungen: sinngemäß die gleichen wie bei Scheiben und Platten

3.1 Membranzustand

Annahmen: keine Normalspannung \perp Schalenmittelfläche

Normalspannungen \parallel Schalenmittelfläche gleichmäßig über

Wandstärke verteilt, daher unabhängig von z -Koordinate
(analog zur Scheibe)

keine Schubspannungen (**ebener Hauptspannungszustand**)

Voraussetzungen für Membranzustand:

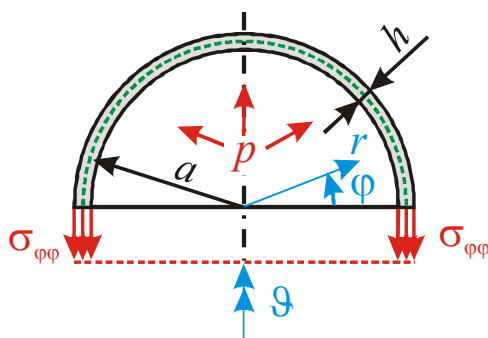
- Mittelfläche verläuft stetig gekrümmt
- Schalendicke nicht sprunghaft veränderlich
- stetige Verteilung der Flächenlasten
- Randkräfte tangential zur Mittelfläche angreifend
- Randbedingungen beeinflussen Formänderungen nur in tangentialer Richtung

Wenn mindestens eine Bedingung verletzt ist, dann liegt **Biege**zustand vor (s. u.)

Hier: Belastung nur durch Innendruck (Behältertheorie)

nur spezielle Geometrien (keine Herleitung der allgemeinen Theorie)

3.1.1 Kugelschale



$$\uparrow: -\sigma_{\varphi\varphi} h 2 \pi a + p \pi a^2 = 0$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{a}{2h} p = \sigma_{\vartheta\vartheta} \quad (2.19)$$

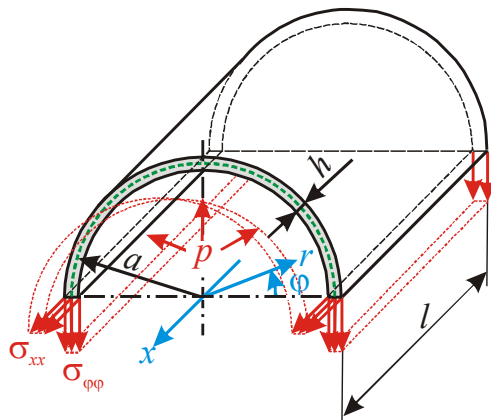
Radiale Aufweitung u_r aus:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{2 \pi (a + u_r) - 2 \pi a}{2 \pi a} = \frac{u_r}{a} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \sigma_{\vartheta\vartheta}) = \frac{1-\nu}{E} \frac{a}{2h} p$$

$$u_r = \frac{1-\nu}{2} \frac{a^2}{h} \frac{p}{E} \quad (2.20)$$

3.1.2 Zylinderschale

Anwendung: Flugzeugrumpf in großer Höhe



$$\begin{aligned} \uparrow: & -\sigma_{\phi\phi} 2 h l + p 2 a l = 0 \\ \swarrow: & \sigma_{xx} 2 \pi a h - p \pi a^2 = 0 \end{aligned}$$

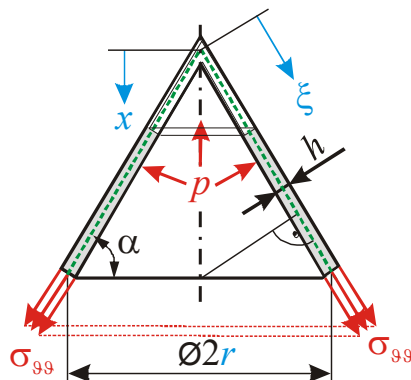
$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= \frac{a}{h} p \\ \sigma_{xx} &= \frac{a}{2 h} p \end{aligned} \quad (2.21)$$

Radiale Aufweitung u_r (analog zur Kugelschale) aus:

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{a} = \frac{1}{E} (\sigma_{\phi\phi} - \nu \sigma_{xx}) = \frac{2-\nu}{E} \frac{a}{2 h} p$$

$$u_r = \frac{2-\nu}{2} \frac{a^2}{h} \frac{p}{E} \quad (2.22)$$

3.1.3 Kegelschale

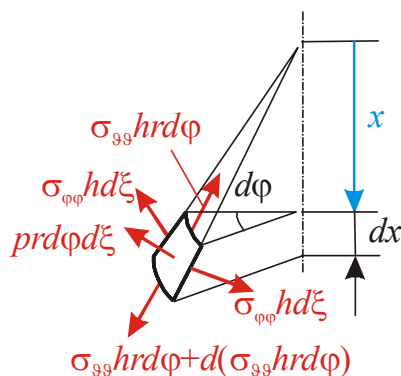


Geometrie:

$$\cot \alpha = \frac{r}{x} \quad \sin \alpha = \frac{x}{\xi}$$

$$\uparrow: -\sigma_{xx} 2 \pi r h \sin \alpha + p \pi r^2 = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{r}{2 h \sin \alpha} p \quad (2.23)$$



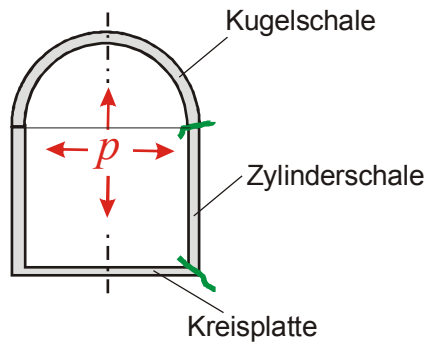
$$\swarrow: p h d\xi d\phi \sin \alpha + p r d\phi d\xi = 0$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{r}{h \sin \alpha} p = \frac{x \cot \alpha}{h \sin \alpha} p$$

3.2 Biegezustand der Kreiszyklinderschale

Die Biegetheorie ist u. a. bei dem so genannten Randstörproblem anzuwenden. Dieses tritt z. B. bei der Kombination verschiedener Flächentragwerke (Schale/Schale, Schale/Platte, Schale/Scheibe) auf,

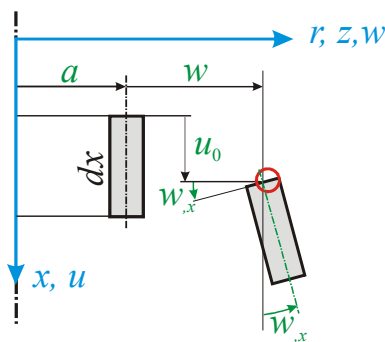
z. B.:



Unstetigkeiten an den **Schnitten**:
⇒ Auftreten von Moment und Querkraft

Herleitung einer Dgl. für die radiale Aufweitung w der Zylinderschale

Geometrie:



u_0 axiale Verschiebung der
Schalenmittefläche
 $z w_{,x}$ (vgl. Platte)

$$u = u_0 - z w_{,x}$$

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} = u_{0,x} - z w_{,xx}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{(a + w + z) 2\pi - (a + z) 2\pi}{(a + z) 2\pi} = \frac{w}{a + z} \\ &= \frac{w}{a} \frac{1}{1 + \frac{z}{a}} \approx \frac{w}{a} \left(1 - \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} - \dots \right) \end{aligned}$$

Reihenentwicklung für $\frac{z}{a} \ll 1$

HOOKESches Gesetz:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[u_{0,x} - z w_{,xx} + \nu \frac{w}{a} \left(1 - \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} - \dots \right) \right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{xx}) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{a} \left(1 - \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} - \dots \right) + \nu (u_{0,x} - z w_{,xx}) \right] . \end{aligned}$$

Schnittgrößen (s. (1.11), S. 10):

$$\bullet \quad m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(u_{0,x} + \nu \frac{w}{a} \right) \left(z + \frac{z^2}{a} \right) - \left(w_{,xx} + \nu \frac{w}{a^2} \right) \left(z^2 + \frac{z^3}{a} \right) \dots \right] dz$$

Terme mit z und z^3 liefern keinen Beitrag, Terme ab $\left(\frac{z}{a}\right)^4$ werden vernachlässigt:

$$m_x = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{3} 2 \left(\frac{h}{2}\right)^3 \left(\frac{u_{0,x}}{a} + \nu \frac{w}{a^2} - w_{,xx} - \nu \frac{w}{a^2} \right) = K \left(\frac{u_{0,x}}{a} - w_{,xx} \right) \stackrel{\text{s.u.}}{=} K \left(\frac{n_{x0}}{D a} - \nu \frac{w}{a^2} - w_{,xx} \right)$$

mit: $K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ **K Biegesteifigkeit** (s. Platte) (2.24)

$$\bullet \quad n_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(u_{0,x} + \nu \frac{w}{a} \right) \left(1 + \frac{z}{a} \right) - \left(w_{,xx} + \nu \frac{w}{a^2} \right) \left(z + \frac{z^2}{a} \right) \right] dz$$

Terme mit z liefern keinen Beitrag, Terme ab $\left(\frac{z}{a}\right)^2$ werden vernachlässigt:

$$n_x = \frac{E h}{1-\nu^2} \left(u_{0,x} + \nu \frac{w}{a} \right) = D \left(u_{0,x} + \nu \frac{w}{a} \right) \stackrel{\text{s.u.}}{=} n_{x0} = \text{konst.}$$

mit: $D = \frac{E h}{1-\nu^2}$ **D Dehnsteifigkeit** (2.25)

$$\Rightarrow: u_{0,x} = \frac{n_{x0}}{D} - \nu \frac{w}{a}$$

$$\bullet \quad n_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz = \frac{E h}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{a} + \nu u_{0,x} \right) = D \left[\frac{w}{a} + \nu \left(\frac{n_{x0}}{D} - \nu \frac{w}{a} \right) \right] = D(1-\nu) \frac{w}{a} + \nu n_{x0} \quad .$$

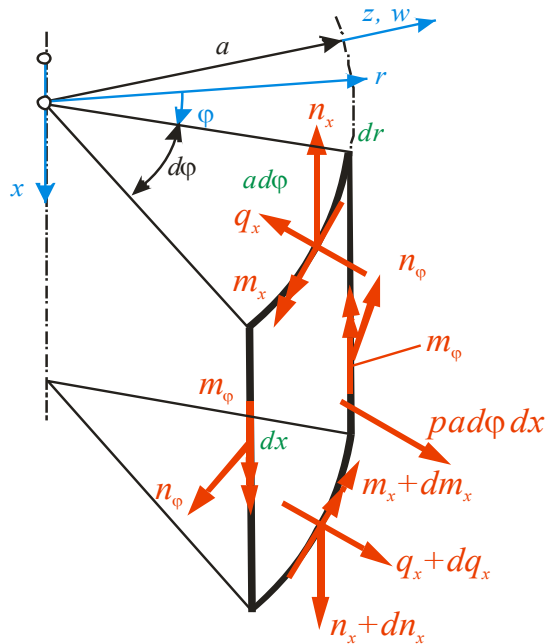
q_x folgt über die Gleichgewichtsbedingungen (s. u.) zu:

$$\stackrel{\text{s.u.}}{q_x} = m_{x,x} = K \left(\frac{u_{0,xx}}{a} - w_{,xxx} \right) = K \left(-\nu \frac{w_{,xx}}{a^2} - w_{,xxx} \right) = -K \left(\nu \frac{w}{a^2} + w_{,xx} \right)_{,x}$$

Da $\frac{w}{a^2} \ll w_{,xx}$, können die Gleichungen für m_x und q_x noch vereinfacht werden:

$$m_x = \frac{K}{D a} n_{x0} - K w_{,xx} = \frac{h^2}{12 a} n_{x0} - K w_{,xx} \quad q_x = -K w_{,xxx} .$$

Gleichgewichtsbedingungen:



Belastung nur durch Innendruck p
(Behälter)

$$\begin{array}{ll} x \downarrow: & dn_x a d\phi = 0 \quad | : a d\phi \\ r \searrow & a d\phi - n_\phi dx d\phi + p a d\phi dx = 0 \quad | : a d\phi dx \\ \phi \nearrow: & a d\phi - q_x a d\phi dx = 0 \quad | : a d\phi dx \end{array} .$$

Folgerungen:

$$\left. \begin{array}{l} n_x = n_{x0} = \text{konst.} \\ q_{x,x} - \frac{n_\phi}{a} + p = 0 \\ m_{x,x} - q_x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m_{x,xx} - \frac{n_\phi}{a} + p = 0 .$$

Einsetzen der Schnittgrößen in die obige Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$K \left(\frac{n_{x0}}{D a} - w'' \right) - \frac{D}{a} \left[\frac{w}{a} + \nu \left(\frac{n_{x0}}{D} - \nu \frac{w}{a} \right) \right] + p = 0 \quad () = ()_{,x}$$

Mit $n_{x0}'' = 0$ wird daraus:

$$-K w^{IV} - \frac{D}{a^2} (1 - \nu^2) w - \nu \frac{n_{x0}}{a} + p = 0 \quad | : (-K)$$

$$w^{IV} + 4 k^4 w = \frac{p}{K} - \frac{\nu n_{x0}}{a K}$$

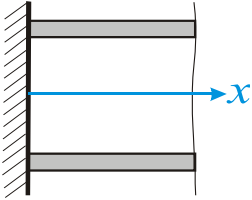
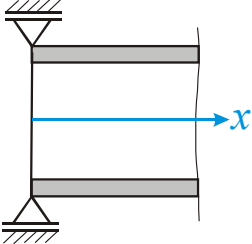
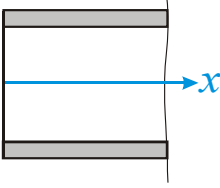
vgl. Balken: Biegelinie Dgl. 4. Ordnung
(2.26)

$$\text{mit: } \frac{D(1-\nu^2)}{K a^2} = \frac{E h 12(1-\nu^2)}{E h^3 a^2} = 4 \underbrace{\frac{3(1-\nu^2)}{h^3}}_{k^2} = 4 k^4$$

$$k = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{a h}} \quad k \text{ Abklingfaktor} \quad (2.27)$$

Randbedingungen:

Im Allgemeinen gilt, dass an jedem der 2 Ränder (eines Bereichs) 2 Randbedingungen zur Bestimmung der 4 Integrationskonstanten angegeben werden können.

eingespannter Rand	gelenkig gelagerter Rand	freier Rand
		
$x = 0: w = 0$ $w' = 0$	$x = 0: w = 0$ $m_x = 0$	$x = 0: m_x = 0$ $q_x = 0$

Lösung der Dgl.:

Allgemeine Lösung:

$$w = w_h + w_p$$

Ansatz für homogene Lösung (analog [2/3]):

$$w_h = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\lambda_i x}$$

Charakteristische Gleichung und deren Lösungen:

$$\lambda_i^4 + 4 k^4 = 0$$

$$\lambda_{1...4} = (\pm 1 \pm i) k$$

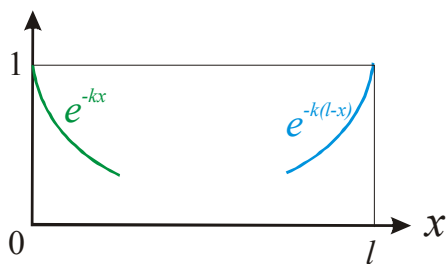
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned}
w_h &= A_1 e^{(1+i)kx} + A_2 e^{(1-i)kx} + A_3 e^{(-1+i)kx} + A_4 e^{(-1-i)kx} \\
&= A_1 e^{kx} e^{ikx} + A_2 e^{kx} e^{-ikx} + A_3 e^{-kx} e^{ikx} + A_4 e^{-kx} e^{-ikx} \\
&= e^{kx} (A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}) + e^{-kx} (A_3 e^{ikx} + A_4 e^{-ikx}) \quad \text{EULERSche Formel [2 / 6]} \\
&= e^{kx} [A_1 (\cos kx + i \sin kx) + A_2 (\cos kx - i \sin kx)] + \\
&\quad + e^{-kx} [A_3 (\cos kx + i \sin kx) + A_4 (\cos kx - i \sin kx)] \\
&= e^{kx} (\bar{C}_1 \cos kx + \bar{C}_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx)
\end{aligned}$$

$$w_h = e^{-k(l-x)} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) \quad l \text{ Schalenlänge} \quad (2.28)$$

Abklingverhalten der Randstörungen:

$$w_h = \underbrace{e^{-k(l-x)} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)}_{\text{Abklingen mit wachsendem } l-x} + \underbrace{e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx)}_{\text{Abklingen mit wachsendem } x}$$



$x \ll l$: ausschließliche Verwendung des Terms e^{-kx}
 $x \approx l$: ausschließliche Verwendung des Terms $e^{-k(l-x)}$

Wann ist eine Schale „lang“?

z. B.: $k l_0 = \pi$:

$$e^{-\pi} = 0,0432\dots$$

(zum Vergleich: $e^0 = 1$)

$$l_0 = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi \sqrt{a h}}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}$$

$$l_0 \approx 2,5 \sqrt{a h}$$

für $\nu = 0,3$

(2.29)

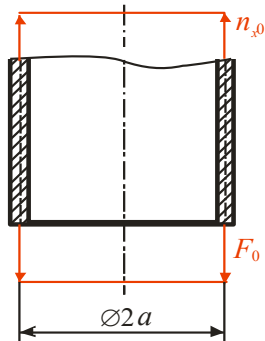
Beispiel: $a = 3 \cdot 10^3 \text{ mm}$

$h = 10 \text{ mm}$

$$\underline{l_0 = 433 \text{ mm}}$$

Spezielle Partikulärlösungen:

- offener Behälter (kein Innendruck) unter Längskraft (Ringkraft) F_0



$$p = 0$$

$$\uparrow: n_{x0} 2 \pi a = F_0 2 \pi a$$

$$n_{x0} = F_0$$

$$w_p = A$$

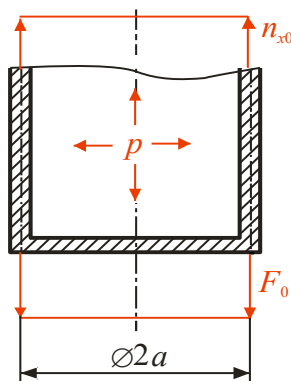
$$w_p^{IV} = 0$$

$$4 k^4 A = -\frac{\nu F_0}{a K}$$

$$A = -\frac{\nu F_0}{a K 4 k^4} = -\frac{\nu a^2}{a E h} F_0$$

$$\underline{w_p = -\frac{\nu a}{E h} F_0}$$

- geschlossener Behälter (Innendruck p) unter Längskraft (Ringkraft) F_0



$$\uparrow: n_{x0} 2 \pi a = p \pi a^2 + F_0 2 \pi a$$

$$n_{x0} = \frac{p a}{2} + F_0$$

$$w_p = A$$

$$w_p^{IV} = 0$$

$$4 k^4 A = \frac{p}{K} - \frac{\nu}{a K} \left(\frac{p a}{2} + F_0 \right)$$

$$A = \frac{p}{K 4 k^4} - \frac{\nu}{a K 4 k^4} \left(\frac{p a}{2} + F_0 \right) = \frac{p a^2}{E h} - \frac{\nu a}{E h} \left(\frac{p a}{2} + F_0 \right)$$

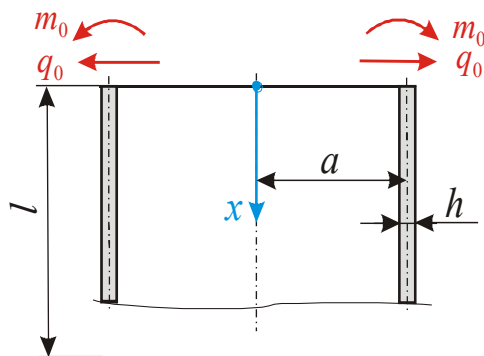
$$\underline{w_p = \frac{a}{E h} \left(\frac{2-\nu}{2} p a - \nu F_0 \right)}$$

Anmerkung:

Die radiale Aufweitung w einer Zylinderschale unter Innendruck ($F_0 = 0$) nach der Membrantheorie beträgt (s. (2.22), S. 67):

$$w = \frac{2-\nu}{E} \frac{a^2}{2 h} p$$

Die *Partikulärlösung* nach der Biegetheorie stimmt also mit der Lösung nach der Membrantheorie überein.

Beispiel: Kreiszylinderschale unter Randlasten

Geg.: $m_0, q_0, a = l = 1 \text{ m}, h = 90 \text{ mm}, \nu = 0,3$

Ges.: Abklingverhalten der Größen w, w', m_x, q_x

Da

$$l_0 \approx 2,5 \sqrt{a h} = 2,5 \sqrt{10^3 \text{ mm} \cdot 90 \text{ mm}} = 2,5 \cdot 300 \text{ mm} = 750 \text{ mm}$$

$$l = 1000 \text{ mm} > 750 \text{ mm} \quad ,$$

kann die Schale als „lang“ betrachtet werden.

Da weder Innendruck noch zusätzliche Axialkräfte wirken, braucht nur die homogene Lösung der langen Schale berücksichtigt zu werden:

$$w = e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) \quad .$$

Über die beiden Randbedingungen:

$$m_x(0) = -m_0 = -K w''(0) = 2 K k^2 C_4$$

$$q_x(0) = -q_0 = -K w'''(0) = -2 K k^3 (C_3 + C_4)$$

werden die Integrationskonstanten bestimmt zu:

$$C_3 = \frac{q_0}{2 K k^3} + \frac{m_0}{2 K k^2}$$

$$C_4 = -\frac{m_0}{2 K k^2} \quad .$$

Damit lauten die Ergebnisse (s. folgende Seite):

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{e^{-kx}}{2 K k^3} \left[k m_0 (\cos kx - \sin kx) + q_0 \cos kx \right] \\
 w' &= -\frac{e^{-kx}}{2 K k^2} \left[2 k m_0 \cos kx + q_0 (\cos kx + \sin kx) \right] \\
 w'' &= \frac{e^{-kx}}{K k} \left[k m_0 (\cos kx + \sin kx) + q_0 \sin kx \right] \sim \\
 w''' &= \frac{e^{-kx}}{K} \left[-2 k m_0 \sin kx + q_0 (-\sin kx + \cos kx) \right] \sim
 \end{aligned}$$

Speziell am freien Rand (bei $x = 0$) gilt dann:

$$\begin{aligned}
 w(0) &= \frac{1}{2 K k^3} (k m_0 + q_0) \\
 w'(0) &= -\frac{1}{2 K k^2} (2 k m_0 + q_0) \\
 w''(0) &= \frac{1}{K} m_0 \\
 w'''(0) &= \frac{1}{K} q_0 \quad .
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung wird in die zwei durch die Belastung bedingten Anteile aufgespalten:

$q_0 \neq 0; \quad m_0 = 0:$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{e^{-kx}}{2 K k^3} q_0 \cos kx \\
 w' &= -\frac{e^{-kx}}{2 K k^2} q_0 (\cos kx + \sin kx) \\
 w'' &= \frac{e^{-kx}}{K k} q_0 \sin kx \\
 w''' &= \frac{e^{-kx}}{K} q_0 (-\sin kx + \cos kx)
 \end{aligned}$$

$m_0 \neq 0; \quad q_0 = 0:$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{e^{-kx}}{2 K k^2} m_0 (\cos kx - \sin kx) \\
 w' &= -\frac{e^{-kx}}{K k} m_0 \cos kx \\
 w'' &= \frac{e^{-kx}}{K} m_0 (\cos kx + \sin kx) \\
 w''' &= \frac{2e^{-kx} k}{K} m_0 \sin kx \quad .
 \end{aligned}$$

Diese Beziehungen werden normiert:

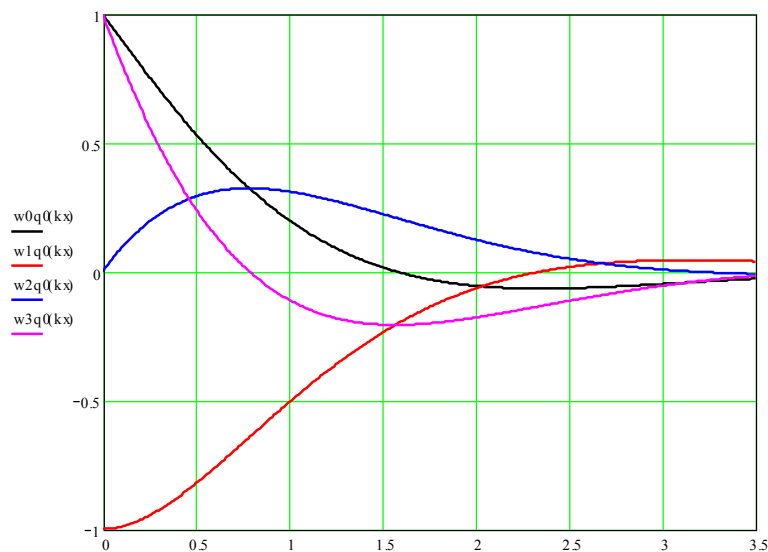
$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{2 K k^3}{q_0} w = e^{-kx} \cos kx & \bar{w} &= \frac{2 K k^2}{m_0} w = e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) \\
 \bar{w}' &= \frac{2 K k^2}{q_0} w' = -e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) & \bar{w}' &= \frac{K k^2}{m_0} w' = -e^{-kx} \cos kx \\
 \bar{w}'' &= \frac{K k}{q_0} w'' = e^{-kx} \sin kx & \bar{w}'' &= \frac{K}{m_0} w'' = e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) \\
 \bar{w}''' &= \frac{K}{q_0} w''' = e^{-kx} (-\sin kx + \cos kx) & \bar{w}''' &= \frac{K}{2k m_0} w''' = e^{-kx} \sin kx \quad .
 \end{aligned}$$

Für die grafische Darstellung werden berechnet:

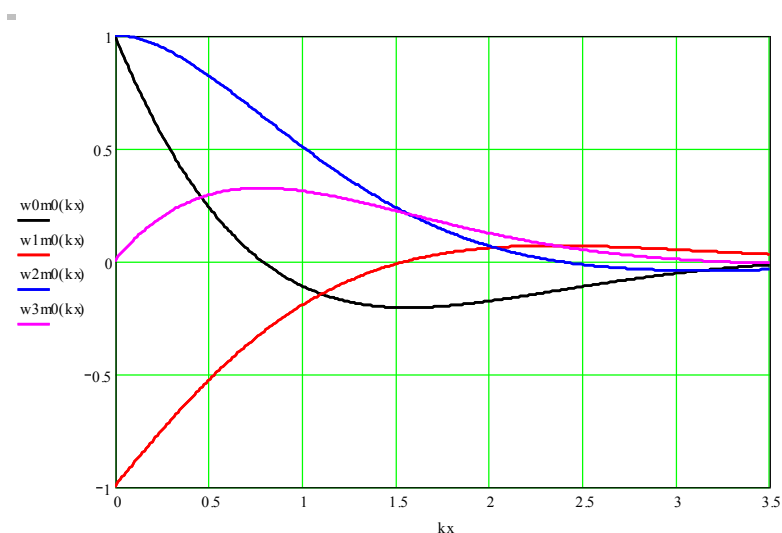
$$k = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{a h}} = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot 0,91}}{300 \text{ mm}} = 0,00428 \text{ mm}^{-1}$$

$$x = 750 \text{ mm} : \quad kx = 3,21 \quad .$$

Belastung durch q_0 :



Belastung durch m_0 :



Wie aus beiden Diagrammen ersichtlich, klingen die durch die Randstörungen hervorgerufenen Schnittgrößen in Form gedämpfter Schwingungen vom Rande $x=0$ her rasch ab. Bei $x = 750 \text{ mm}$ betragen sie nur noch ca. 4%.