

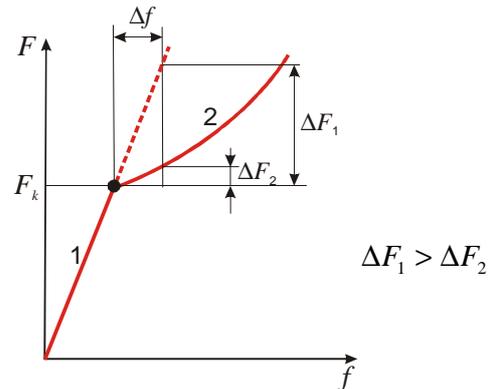
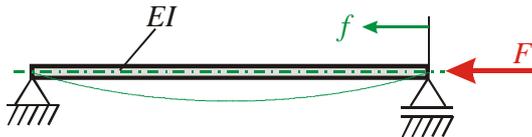
## 2.2 Plattenbeulung

Bei Platten kommt zur Querbelastung häufig Druckbelastung in Plattenmittelfläche. Das führt zu einer Überlagerung mit dem Scheibenspannungszustand.

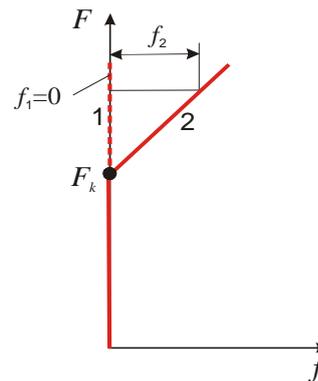
⇒ Stabilitätsproblem: Plattenbeulung

### 2.2.1 Problemstellung

Analogie zur Stabknickung



Idealisierung: dehnteife Balkenachse  
dehnteife Plattenmittelfläche



Bei  $F = F_k$  Lösungsverzweigung (Bifurkation):

$$F < F_k : f = 0$$

$$F \geq F_k : \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 > 0 \end{cases}$$

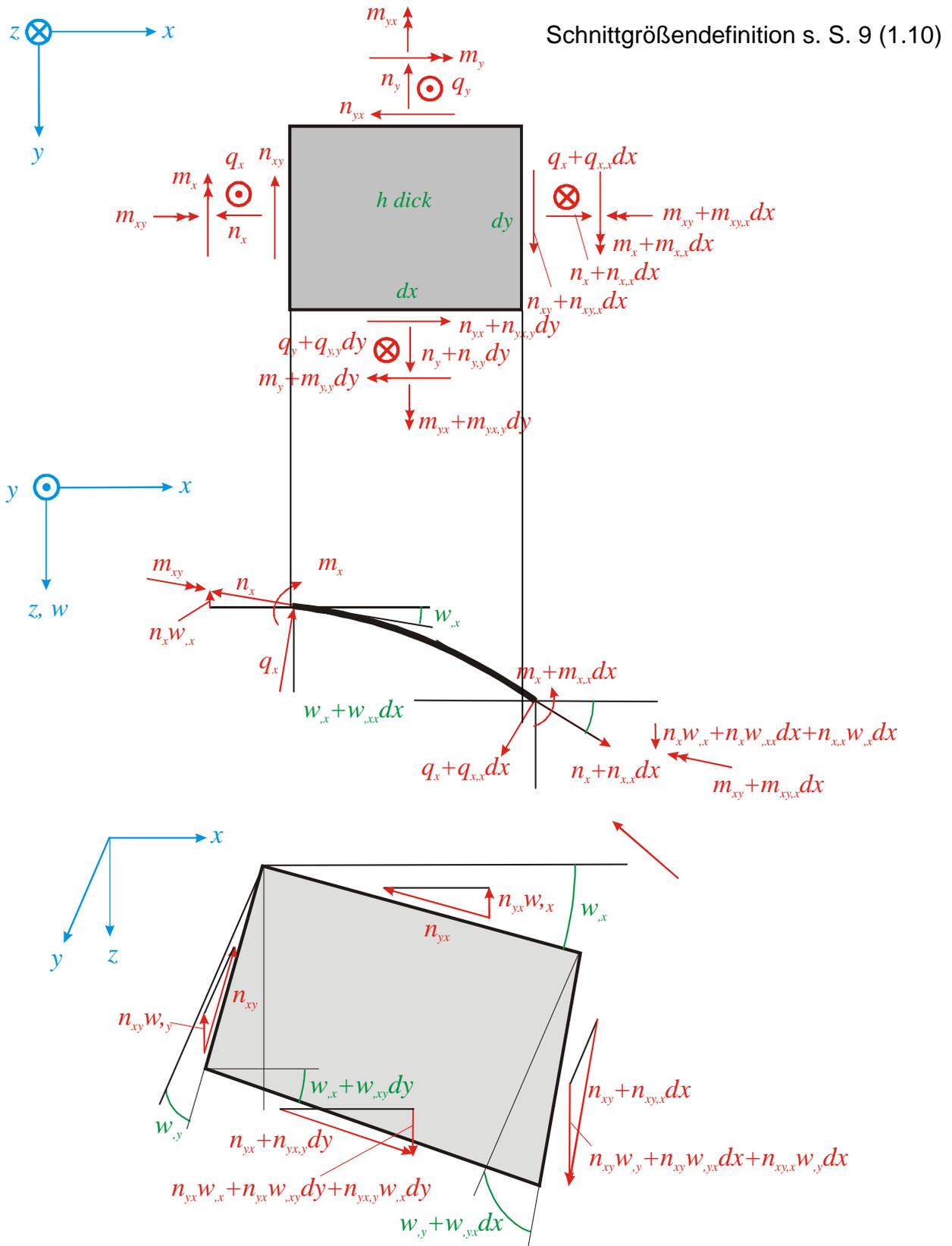
Weg 2 erfordert weniger Kraft (Energie) als Weg 1

⇒ Existenz von  $f_2$  prüfen!

Bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen ist die Auslenkung der undeformierten Mittelfläche zu berücksichtigen (**Theorie zweiter Ordnung**)!

### 2.2.2 Herleitung einer Dgl. für das Problem

Gleichgewicht am verformten Plattenelement  $dV = dx dy h$  :



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow: \quad n_{x,x} dx dy + n_{yx,y} dy dx = 0 \\ y \downarrow: \quad n_{y,y} dy dx + n_{xy,x} dx dy = 0 \end{array} \right\} \text{Scheibe ESZ}$$

$$\begin{aligned} z \otimes: \quad q_{x,x} dx dy + q_{y,y} dy dx + n_x w_{,xx} dx dy + n_{x,x} w_{,x} dx dy + \\ + n_y w_{,yy} dy dx + n_{y,y} w_{,y} dy dx + \\ + n_{xy} w_{,yx} dx dy + n_{xy,x} w_{,y} dx dy + \\ + n_{yx} w_{,xy} dy dx + n_{yx,y} w_{,x} dy dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} y \downarrow: \quad m_{x,x} dx dy + m_{yx,y} dy dx - q_x dy dx = 0 \\ x \leftarrow: \quad m_{y,y} dy dx + m_{xy,x} dx dy - q_y dx dy = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Zusätzliche Terme gegenüber} \\ \text{Plattenbiegung} \end{array}$$

Die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen werden in die dritte eingesetzt. Diese und die letzten beiden vereinfachten Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} -q_{x,x} - q_{y,y} &= n_x w_{,xx} + n_y w_{,yy} + 2 n_{xy} w_{,xy} \\ m_{x,x} + m_{yx,y} - q_x &= 0 & \left| \text{Partielle Ableitung nach } x \right. \\ m_{y,y} + m_{xy,x} - q_y &= 0 & \left| \text{Partielle Ableitung nach } y \right. \\ m_{x,xx} + 2 m_{xy,xy} + m_{y,yy} + n_x w_{,xx} + n_y w_{,yy} + 2 n_{xy} w_{,xy} &= 0 \end{aligned}$$

(2.16)

### Geometrie:

Wenn durch die Lagerung keine Behinderung erfolgt, bleibt die Plattenmittelfläche ungedehnt. Es tritt dann nur die bereits bekannte Biegeverformung  $w(x,y)$  (s. 2.1.2) auf.

Damit werden die Verzerrungen wie in 2.1.2 berechnet.

Über das **HOOKESche Gesetz** folgen die ebenfalls schon bereit gestellten Beziehungen für die Spannungen  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ .

Die damit formulierten **Schnittgrößen** liefern den bekannten Zusammenhang:

$$m_{x,xx} + 2 m_{xy,xy} + m_{y,yy} = -K (w_{,xxxx} + 2 w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) = -K \Delta \Delta w \quad .$$

Dieser wird in Gleichung (2.16) eingesetzt und die **Dgl. des Problems** formuliert:

$$K \Delta \Delta w - n_x w_{,xx} - n_y w_{,yy} - 2 n_{xy} w_{,xy} = 0 \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Randbedingungen

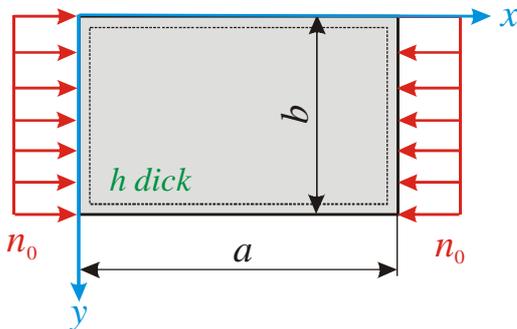
Im Falle der unbehinderten Mittelflächenverschiebung gelten die Randbedingungen der Plattenbiegung analog.

Eine Ausnahme bilden die Ersatzquerkräfte. Die bisherigen sind durch die vertikalen Komponenten der Normalkräfte zu ergänzen:

$$\begin{aligned}\bar{q}_x &= q_x + m_{xy,y} + n_x w_{,x} + n_{xy} w_{,y} \\ \bar{q}_y &= q_y + m_{xy,x} + n_y w_{,y} + n_{xy} w_{,x} \quad .\end{aligned}\tag{2.18}$$

## 2.2.4 Beispiel

Allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte unter Druckbelastung  $n_0$



Geg.:  $a, b, (b < a), n_x = -n_0, E, h, \nu$

Ges.: Kritische Belastung in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis (Beuldiagramm)

Mit  $n_y = n_{xy} = 0$ , lautet die zu verwendende Dgl.:

$$K \Delta \Delta w + n_0 w_{,xx} = 0 \quad \text{mit:} \quad K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} .$$

Die Lösung muss die Randbedingungen (jeweils 2 an 4 Rändern)

$$\left. \begin{array}{l} x=0: \\ x=a: \end{array} \right\} \begin{array}{l} w=0 \\ w_{,xx}=0 \end{array} \quad (m_x=0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0: \\ y=b: \end{array} \right\} \begin{array}{l} w=0 \\ w_{,yy}=0 \end{array} \quad (m_y=0)$$

erfüllen (s. Beispiel zur Plattenbiegung).

Der folgende Ansatz (s. 2.1.4) verwirklicht das:

$$w(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} .$$

In die Dgl. eingesetzt, liefert der Ansatz:

$$\sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} w_{mn} \left\{ K \left[ \left( \frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n \pi}{b} \right)^2 \right]^2 - n_0 \left( \frac{m \pi}{a} \right)^2 \right\} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} = 0 .$$

Daraus folgt der Zusammenhang für jedes Reihenglied:

$$n_0 = \frac{\left[ \left( \frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n \pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left( \frac{m \pi}{a} \right)^2} K = \left[ \frac{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2}{\frac{m}{a}} \right]^2 K \pi^2 .$$

Minimale Werte erhält man für  $n = 1$  (d. h. für eine Halbwelle in  $y$ -Richtung):

$$n_0 = \left[ \frac{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2}{\frac{m}{a}} \right]^2 K \pi^2 = \left( \frac{m}{a} + \frac{a}{m} \frac{1}{b^2} \right)^2 K \pi^2 .$$

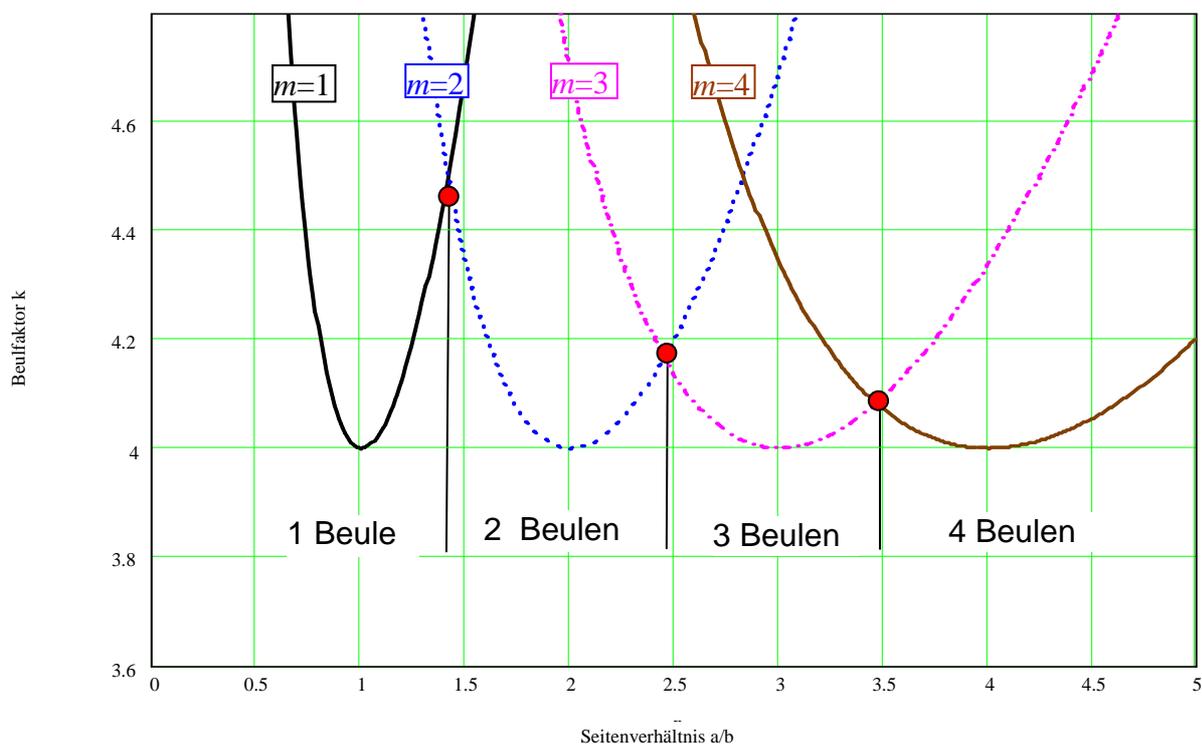
Mit dem Seitenverhältnis  $\alpha = \frac{a}{b}$  wird daraus:

$$n_0 = \left( \frac{m}{\alpha b} + \frac{\alpha b}{m} \frac{1}{b^2} \right)^2 K \pi^2 = \left( \frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{K \pi^2}{b^2} = k n_e .$$

mit:  $k = \left( \frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2$   $k$  Beulfaktor

$$n_e = \frac{K \pi^2}{b^2} = \frac{E h^3 \pi^2}{12(1-\nu^2) b^2}$$

Der Graf des Beulfaktors  $k$  in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis  $\alpha$  und der Anzahl der Beulen  $m$  in  $x$ -Richtung, die so genannte **Girlandenkurve**, hat dieses Aussehen:



Für den Beulfaktor  $k$  wird das *Minimum* in Abhängigkeit von  $\alpha = \frac{a}{b}$  bestimmt:

$$\frac{dk}{d\alpha} = 2 \left( \frac{m}{\alpha_0} + \frac{\alpha_0}{m} \right) \left( -\frac{m}{\alpha_0^2} + \frac{1}{m} \right) = 0$$

$$\alpha_0^2 = m^2$$

$$\alpha_0 = \pm m \quad .$$

Der kleinste Beulfaktor ist also mit  $\alpha_0 = +m$ :

$$k = (1+1)^2 = 4$$

und damit unabhängig von der Anzahl der Beulen  $m$ .

Für die dargestellte Funktion  $k = k(\alpha)$  mit dem Parameter  $m$  werden noch die *Schnittpunkte*  $\alpha_{m,m+1}$  von jeweils 2 benachbarten Parabeln ermittelt:  
Es gilt allgemein:

$$k_m = k_{m+1}$$

$$\frac{m}{\alpha_{m,m+1}} + \frac{\alpha_{m,m+1}}{m} = \frac{m+1}{\alpha_{m,m+1}} + \frac{\alpha_{m,m+1}}{m+1} \quad ,$$

mit den Lösungen:

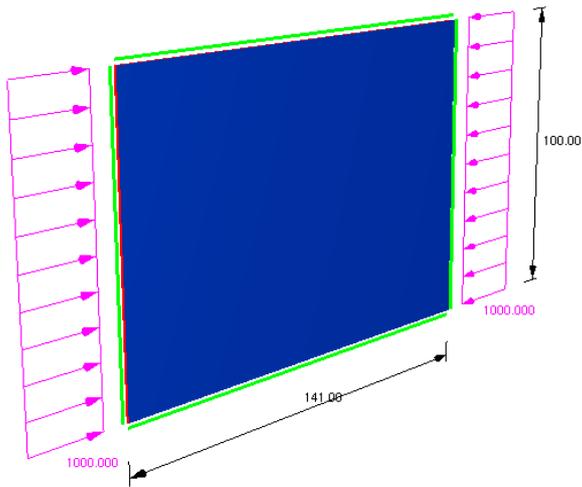
$$\alpha_{m,m+1} = \sqrt{m(m+1)} \quad .$$

Die ersten Schnittpunkte erhält man damit zu:

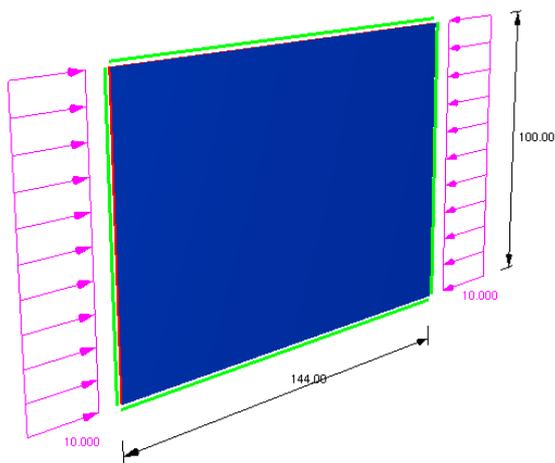
$$\begin{aligned} m=1: & \quad \alpha_{1,2} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \\ m=2: & \quad \alpha_{2,3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} \\ m=3: & \quad \alpha_{3,4} = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12} \quad , \dots \end{aligned}$$

Signifikant zur Auswertung von Beulproblemen sind damit die jeweiligen Parabelabschnitte unterhalb der Schnittpunkte von jeweils zwei benachbarten Parabeln („Girlande“).

Zur Illustration und Kontrolle: Beispielrechnung mit FE-BEUL (DLUBAL GmbH)



Geometrie und Beulform für  $\alpha = 1,41 < \sqrt{2}$



Geometrie und Beulform für  $\alpha = 1,44 > \sqrt{2}$