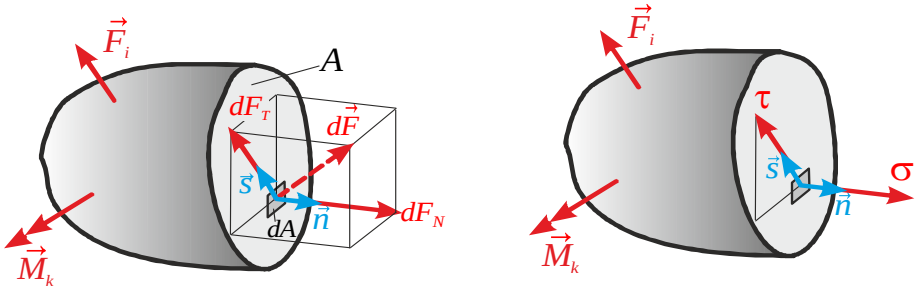
A Grundlagen

1 Spannungen

1.1 Spannungsvektor

Die Schnittgrößen können kein Maß für die Beanspruchung der Bauteile sein.
Der Bezug auf die Schnittfläche ist nötig. => Spannung.



Spannung – auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft(-komponente):

Spannungsvektor

$$\vec{t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial A} = \sigma\,\vec{n} + \tau\,\vec{s}$$

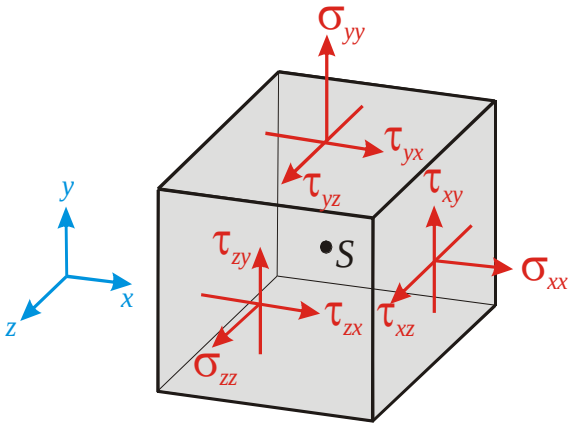
mit Koordinaten:

$$\sigma = \frac{dF_N}{dA}$$ Normalspannung

$$\tau = \frac{dF_T}{dA}$$ Tangentialspannung (oder Schubspannung)

und $\vec{n}, \vec{s}$ Einheitsvektoren in normaler bzw. tangentialer Richtung zur Schnittfläche

1. 2 Räumlicher Spannungszustand



Notation:

Indizierung:

z. B.: σ_{xx} Normalspannung an Schnittfläche x = konst. (in x-Richtung)

τ_{xz} Schubspannung an Schnittfläche x = konst. in z-Richtung

Die Spannungen an den verdeckt liegenden Flächen sind analog und entgegen gesetzt zu den skizzierten anzunehmen.

andere Schreibweisen:

z. B.: $\sigma_{xx} = \sigma_x = \tau_{xx} = t_{xx}$

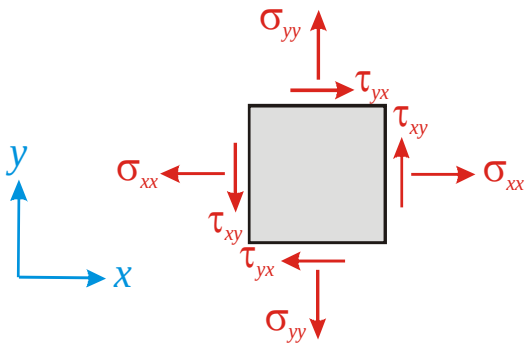
$\tau_{xz} = \sigma_{xz} = t_{xz}$

Spannungstensor (Tensor 2. Stufe):

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (k,l) = \{x, y, z\}$$ 9 Koordinaten

Sonderfall **ebener Spannungszustand (ESZ)**:

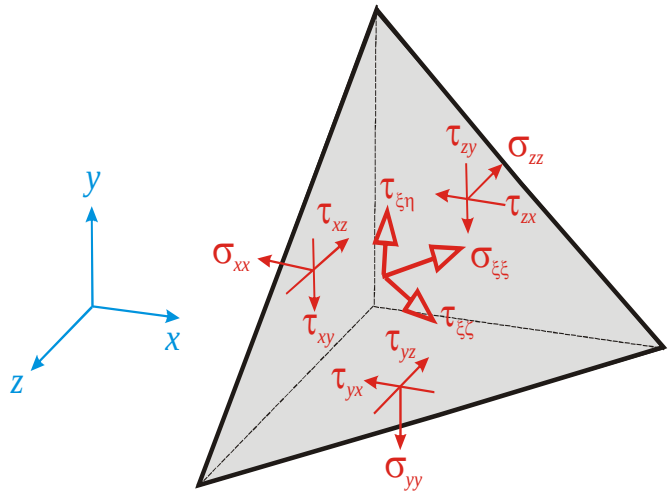
Alle Spannungen liegen in einer Ebene, z. B. in der x,y-Ebene:



$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \qquad (k,l) = \{x, y\}$$ 4 Koordinaten

Der ESZ ist nicht exakt im Sinne der Elastizitätstheorie.
Als Näherung hat er aber eine große praktische Bedeutung (z. B. bei Scheiben, s. u.).

1.3 Spannungstransformation



ξ Koordinate orthogonal zur Schnittfläche

η, ζ Koordinaten in Schnittfläche

Geometrie:

$$\cos(k,\lambda) = c_k^\lambda \qquad k, l = \{x, y, z\}, \quad \lambda, \mu = \{\xi, \eta, \zeta\}$$

$$A_x = A_\xi \; c_x^\xi$$
$$A_y = A_\xi \; c_y^\xi$$
$$A_z = A_\xi \; c_z^\xi$$

$$\vec{e}_k = \vec{e}_\lambda \; c_k^\lambda \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_\lambda = \vec{e}_k \; c_\lambda^k$$

Anwendung der EINSTEINschen Summationsvereinbarung [1/1] (Albert Einstein, 1879 – 1955)

Kraftvektoren an den Tetraederflächen:

$$\vec{F}_x = \left(-\sigma_{xx}\,\vec{e}_x - \tau_{xy}\,\vec{e}_y - \tau_{xz}\,\vec{e}_z\right) A_x$$
$$\vec{F}_y = \left(-\tau_{yx}\,\vec{e}_x - \sigma_{yy}\,\vec{e}_y - \tau_{yz}\,\vec{e}_z\right) A_y$$
$$\vec{F}_z = \left(-\tau_{zx}\,\vec{e}_x - \tau_{zy}\,\vec{e}_y - \sigma_{zz}\,\vec{e}_z\right) A_z$$

$$\vec{F}_\xi = \left(\sigma_{\xi\xi}\,\vec{e}_\xi + \tau_{\xi\eta}\,\vec{e}_\eta + \tau_{\xi\varsigma}\,\vec{e}_\varsigma\right) A_\xi$$

Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z + \vec{F}_\xi = 0$$

$$\left(\sigma_{\xi\xi}\,\vec{e}_\xi + \tau_{\xi\eta}\,\vec{e}_\eta + \tau_{\xi\varsigma}\,\vec{e}_\varsigma\right) A_\xi = \left(\sigma_{xx}\,\vec{e}_x + \tau_{xy}\,\vec{e}_y + \tau_{xz}\,\vec{e}_z\right) A_x +$$
$$+ \left(\tau_{yx}\,\vec{e}_x + \sigma_{yy}\,\vec{e}_y + \tau_{yz}\,\vec{e}_z\right) A_y +$$
$$+ \left(\tau_{zx}\,\vec{e}_x + \tau_{zy}\,\vec{e}_y + \sigma_{zz}\,\vec{e}_z\right) A_z$$

Darin Substitution der $\vec{e}_k$ durch $\vec{e}_\lambda$ und der A_k durch A_λ.

Anschließende skalare Formulierung für die drei Richtungen ξ, η, ζ liefert:

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx}\left(c_x^\xi\right)^2 + \tau_{xy}\, c_y^\xi\, c_x^\xi + \tau_{xz}\, c_z^\xi\, c_x^\xi + \tau_{yx}\, c_x^\xi\, c_y^\xi + \\ + \sigma_{yy}\left(c_y^\xi\right)^2 + \tau_{yz}\, c_z^\xi\, c_y^\xi + \tau_{zx}\, c_x^\xi\, c_z^\xi + \tau_{zy}\, c_y^\xi\, c_z^\xi + \sigma_{zz}\left(c_z^\xi\right)^2 \qquad (1.1)$$

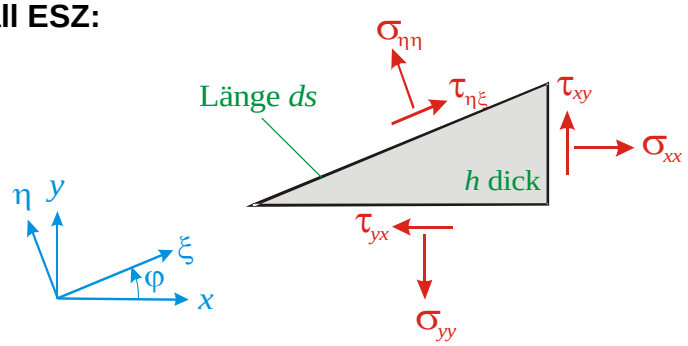
und analog: $\tau_{\xi\eta}$ und $\tau_{\xi\zeta}$.

Schnitte bei η = konst. und ζ = konst. liefern weitere 6 skalare Gleichungen.

Allgemein gilt:

$$\tau_{\lambda\mu} = \tau_{kl}\, c_\lambda^k\, c_\mu^l \qquad (k,l) = \{x,y,z\} \qquad (\lambda,\mu) = \{\xi,\eta,\zeta\}$$

Sonderfall ESZ:



Kräftegleichgewichte:

↖: $$\sigma_{\eta\eta}\, ds\, h - \sigma_{yy}\, ds \cos\varphi\, h \cos\varphi + \tau_{yx}\, ds \cos\varphi\, h \sin\varphi - \\ - \sigma_{xx}\, ds \sin\varphi\, h \sin\varphi + \tau_{xy}\, ds \sin\varphi\, h \cos\varphi = 0$$

↗: $$\tau_{\eta\xi}\, ds\, h - \sigma_{yy}\, ds \cos\varphi\, h \sin\varphi - \tau_{yx}\, ds \cos\varphi\, h \cos\varphi + \\ + \sigma_{xx}\, ds \sin\varphi\, h \cos\varphi + \tau_{xy}\, ds \sin\varphi\, h \sin\varphi = 0$$

Vereinfacht:

$$\sigma_{\eta\eta} = \sigma_{yy} \cos^2\varphi + \sigma_{xx} \sin^2\varphi - 2\,\tau_{xy} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\tau_{\eta\xi} = \left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\right) \sin\varphi \cos\varphi + \tau_{yx}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen für doppelte Argumente [1/2] wird daraus:

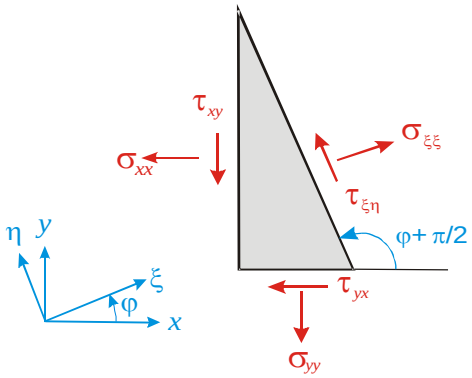
$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\eta\xi} = -\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \qquad .$$

Durch analoge Betrachtungen für eine Schnittfläche bei $\varphi+\frac{\pi}{2}$ erhält man (o. B.):

$$\sigma_{\xi\xi}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\cos 2\varphi+\tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta}=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi=\tau_{\eta\xi} \quad .$$



Die Addition von $\sigma_{\xi\xi}$ und $\sigma_{\eta\eta}$ führt auf:

$$\sigma_{\xi\xi}+\sigma_{\eta\eta}=\sigma_{xx}+\sigma_{yy} \quad .$$

Die Summe zweier (in der x,y-Ebene) senkrecht aufeinander stehender Normalspannungen ist vom Winkel φ unabhängig (Invarianz der Spannungssumme).

1.4 Hauptspannungen

Nach CAUCHY (Augustin Cauchy, 1789 – 1857) sind Hauptspannungen Normalspannungen in den Hauptrichtungen (der Spannungen).
Die Hauptrichtungen (Hauptachsen) sind Richtungen (Achsen) $\perp$ zu den Hauptebenen.
Hauptebenen sind die Ebenen, für die gilt:

$$\tau_{\lambda\mu}=0 \quad \text{mit} \quad \lambda\neq\mu \quad .$$

Unter dieser Voraussetzung kann (1.1) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_{xx}-\sigma_{\xi\xi}\right)c_x^{\xi}+\tau_{yx}\,c_y^{\xi}+\tau_{zx}\,c_z^{\xi}=0\\
&\tau_{xy}\,c_x^{\xi}+\left(\sigma_{yy}-\sigma_{\xi\xi}\right)c_y^{\xi}+\tau_{zy}\,c_z^{\xi}=0\\
&\tau_{xz}\,c_x^{\xi}+\tau_{yz}\,c_y^{\xi}+\left(\sigma_{zz}-\sigma_{\xi\xi}\right)c_z^{\xi}=0 \quad .
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

Analoge Gleichungssysteme erhält man für Schnitte mit den Normalen in η- und ζ-Richtung ($\sigma_{\xi\xi}=\sigma_{\eta\eta}=\sigma_{\zeta\zeta}=\sigma_i$).
Das homogene Gleichungssystem (1.2) hat nur dann eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix}
\sigma_{xx}-\sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\
\tau_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma_i & \tau_{yz}\\
\tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma_i
\end{vmatrix}=0$$

oder:

$$\sigma_i^3 - \sigma_i^2 \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) + \sigma_i \left(\sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} - \tau_{xy}\,\tau_{yx} - \tau_{yz}\,\tau_{zy} - \tau_{xz}\,\tau_{zx}\right) -$$
$$- \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0 \qquad i = \{I, II, III\}$$

Die Lösungen der Gleichung sind die Hauptspannungen $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ mit der Definition $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$.

Mit den bekannten Hauptspannungen können anschließend aus (1.2) die

$$c_\lambda^k \qquad k = \{x, y, z\} \qquad \lambda = \{\xi, \eta, \zeta\}$$

und daraus die Hauptrichtungen berechnet werden.

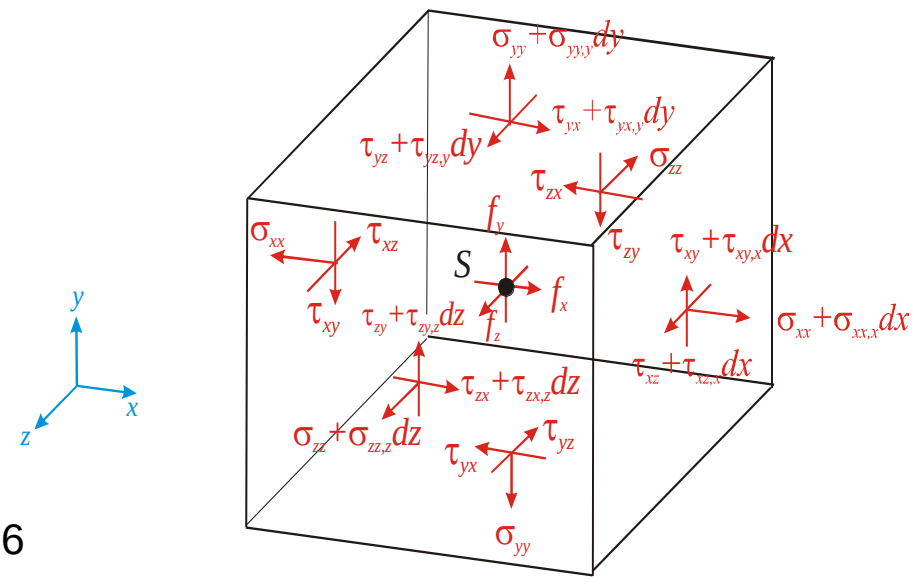
Sonderfall ESZ:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}\,\tau_{yx}}$$

$$\tan 2\varphi_{I,II} = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

1.5 Gleichgewichtsbedingungen

1.5.1 Formulierung in kartesischen Koordinaten *x*, *y*, *z*



Kräftegleichgewichtsbedingungen:

$$\rightarrow: \quad \sigma_{xx,x}\,dx\,dy\,dz + \tau_{yx,y}\,dy\,dx\,dz + \tau_{zx,z}\,dz\,dx\,dy + f_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\uparrow: \quad \tau_{xy,x}\,dx\,dy\,dz + \sigma_{yy,y}\,dy\,dx\,dz + \tau_{zy,z}\,dz\,dx\,dy + f_y\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\swarrow: \quad \tau_{xz,x}\,dx\,dy\,dz + \tau_{yz,y}\,dy\,dx\,dz + \sigma_{zz,z}\,dz\,dx\,dy + f_z\,dx\,dy\,dz = 0$$

vereinfacht:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + f_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{zy,z} + f_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

oder in Kurzschreibweise:

$$t_{kl,k} + f_l = 0 \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{x,y,z\} \qquad (1.3)$$

Momentengleichgewichtsbedingungen bezüglich der Schwerpunktsachsen:

$$\rightarrow\!\!\!\rightarrow: \quad -\tau_{zy}\,dz\,dx\,dy + \tau_{yz}\,dy\,dx\,dz = 0$$

$$\uparrow\!\!\!\uparrow: \quad -\tau_{xz}\,dx\,dy\,dz + \tau_{zx}\,dz\,dx\,dy = 0$$

$$\swarrow\!\!\!\!\!\swarrow: \quad -\tau_{yx}\,dy\,dx\,dz + \tau_{xy}\,dx\,dy\,dz = 0$$

vereinfacht:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \tau_{yz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned}$$

oder in Kurzschreibweise:

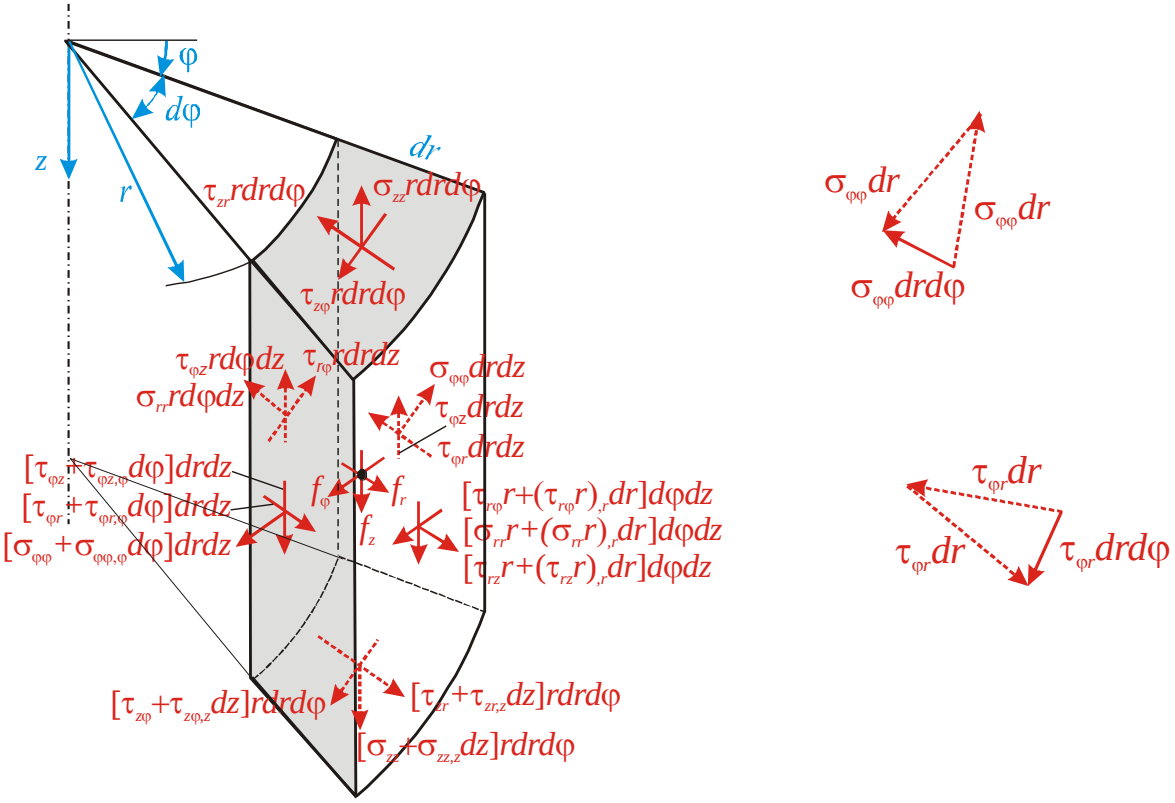
$$t_{kl} = t_{lk} \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{x,y,z\} \quad \text{„zugeordnete Schubspannungen“} \qquad (1.4)$$

Sonderfall ESZ:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \tau_{yx,y} + f_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + f_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{kl,k} + f_l &= 0 \\ t_{kl} &= t_{lk} \end{aligned} \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{x,y\} \qquad (1.5)$$

1.5.2 Formulierung in Zylinderkoordinaten *r*, φ, *z*



Kräftegleichgewichtsbedingungen:

$$\searrow: \quad \left(\sigma_{rr}\, r\right)_{,r} d\varphi\, dr\, dz + \tau_{\varphi r,\varphi}\, dr\, d\varphi\, dz + \tau_{zr,z}\, r\, dr\, d\varphi\, dz - \sigma_{\varphi\varphi}\, dr\, d\varphi\, dz + f_r\, r\, dr\, d\varphi\, dz = 0$$

$$\swarrow: \quad \sigma_{\varphi\varphi,\varphi}\, dr\, d\varphi\, dz + \left(\tau_{r\varphi}\, r\right)_{,r} d\varphi\, dr\, dz + \tau_{\varphi r}\, dr\, d\varphi\, dz + \tau_{z\varphi,z}\, r\, dr\, d\varphi\, dz + f_\varphi\, r\, dr\, d\varphi\, dz = 0$$

$$\downarrow: \quad \sigma_{zz,z}\, r\, dr\, d\varphi\, dz + \left(\tau_{rz}\, r\right)_{,r} dr\, d\varphi\, dz + \tau_{\varphi z,\varphi}\, d\varphi\, dr\, dz + f_z\, r\, dr\, d\varphi\, dz = 0$$

vereinfacht:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\tau_{\varphi r,\varphi} + \tau_{zr,z} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) + f_r = 0\\
&\tau_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + \tau_{z\varphi,z} + 2\frac{1}{r}\tau_{r\varphi} + f_\varphi = 0\\
&\tau_{rz,r} + \frac{1}{r}\tau_{\varphi z,\varphi} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r}\tau_{rz} + f_z = 0
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Sonderfall ESZ:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\tau_{\varphi r,\varphi} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) + f_r = 0\\
&\tau_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + 2\frac{1}{r}\tau_{r\varphi} + f_\varphi = 0
\end{aligned} \qquad (1.7)$$

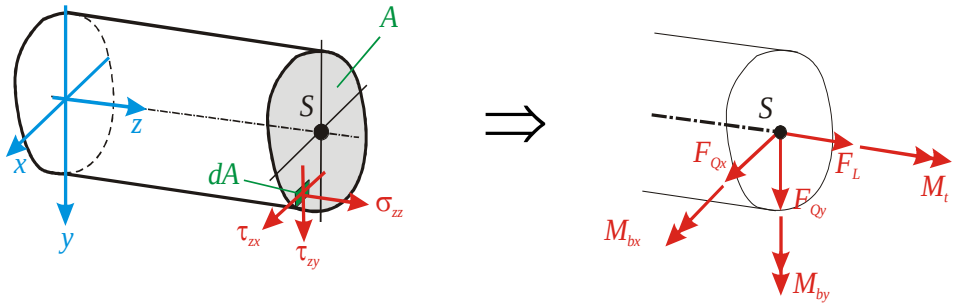
Sonderfall ESZ und Rotationssymmetrie:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) + f_r = 0 \tag{1.8}$$

1.6 Mit den Spannungen formulierte integrale Größen (Schnittgrößen)

Definitionen:

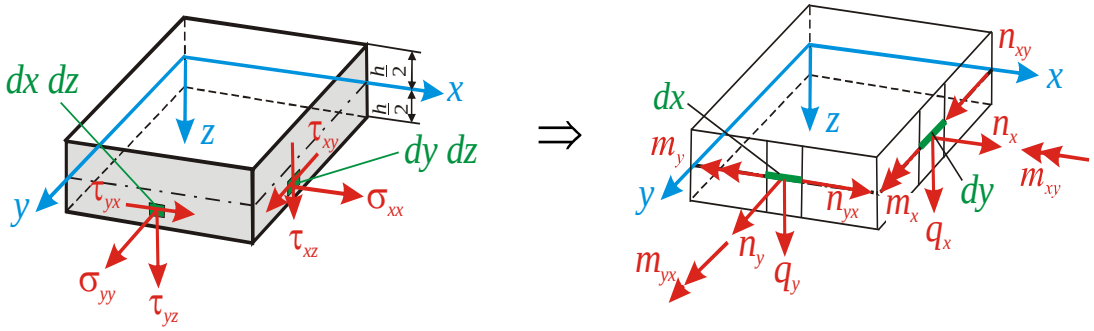
Balken



$$F_L = \int_{(A)} \sigma_{zz}\, dA \qquad F_{Qx} = \int_{(A)} \tau_{zx}\, dA \qquad F_{Qy} = \int_{(A)} \tau_{zy}\, dA \qquad [F] = N$$

$$M_{bx} = \int_{(A)} \sigma_{zz}\, y\, dA \qquad -M_{by} = \int_{(A)} \sigma_{zz}\, x\, dA \qquad M_t = \int_{(A)} \left(\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y\right) dA \qquad [M] = Nm \tag{1.9}$$

Platte

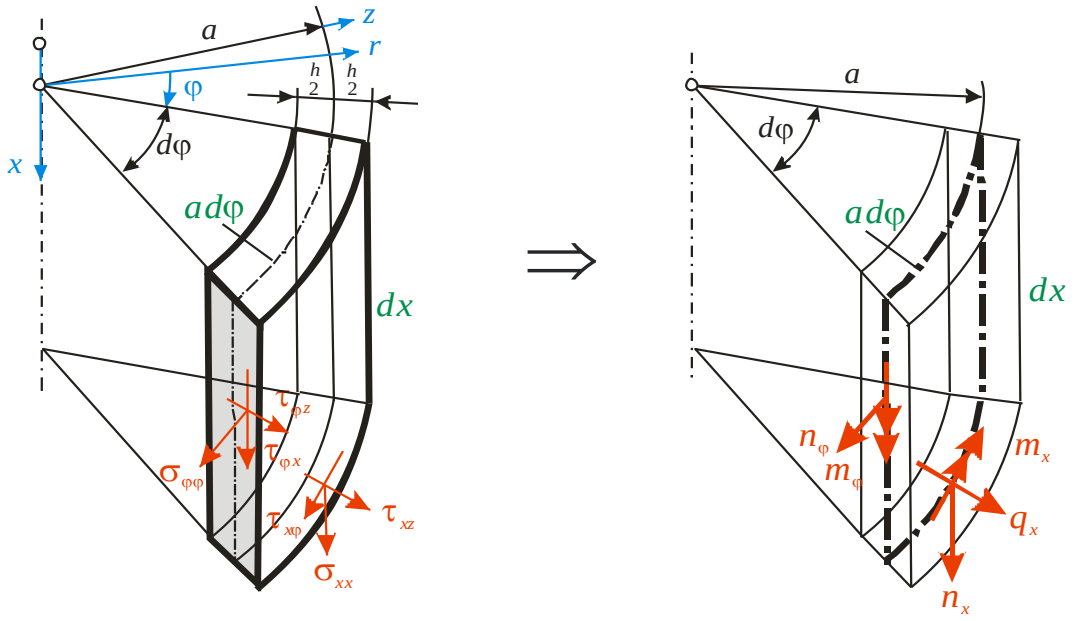


$$n_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\, dz \qquad n_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\, dz \qquad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, dz \qquad [n] = N/m$$

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz}\, dz \qquad q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz}\, dz \qquad [q] = N/m$$

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\, z\, dz \qquad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\, z\, dz \qquad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, z\, dz \qquad [m] = N \tag{1.10}$$

(Kreiszylinder-)Schale



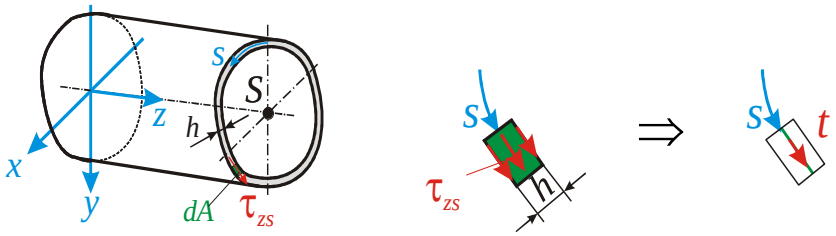
Wegen Rotationssymmetrie: $\tau_{\varphi z} = \tau_{x\varphi} = 0$

$$n_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz \qquad n_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi}\, dz \qquad q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz \qquad \left[\frac{N}{m}\right]$$

(1.11)

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\, z \underbrace{\left(1 + \frac{z}{a}\right)}_{\text{Trapezeffekt}} dz \qquad m_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi}\, z\, dz \qquad [N]$$

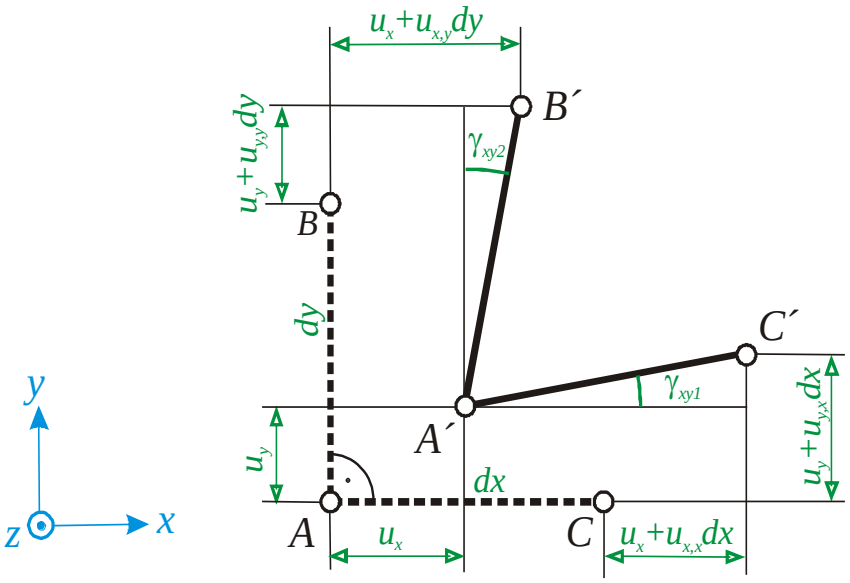
Stabschale



$$\tau_{zs} = konst.: \qquad t = \tau_{zs}\, h \qquad [t] = \frac{N}{m} \qquad \text{Schubfluss} \qquad (1.12)$$

2 Verschiebungen und Verzerrungen

Herleitung am ebenen Problem:



Verschiebungen: u_x, u_y, u_z

Verzerrungen:

- Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} \approx \frac{\left(\overline{A'C'}\right)_{,x} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{dx + u_x + u_{x,x}dx - u_x - dx}{dx} = u_{x,x}$$

analog:

$$\varepsilon_{yy} \approx u_{y,y}$$

$$\varepsilon_{zz} \approx u_{z,z}$$

- Gleitungen (Abweichung vom rechten Winkel)

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy1} + \gamma_{xy2}$$

$$\gamma_{xy1} \approx \frac{u_{y,x}dx}{dx}$$

$$\gamma_{xy2} \approx \frac{u_{x,y}dy}{dy}$$

$$\gamma_{xy} \approx u_{x,y} + u_{y,x}$$

analog:

$$\gamma_{xz} \approx u_{x,z} + u_{z,x}$$

$$\gamma_{yz} \approx u_{y,z} + u_{z,y}$$

oder:

$$
\begin{aligned}
&d_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{x, y, z\} \\
&k = l: \qquad \varepsilon_{kl} = d_{kl} \\
&k \neq l: \qquad \gamma_{kl} = 2\, d_{kl}
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Verzerrungstensor:

$$
\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}
$$

symmetrischer Tensor zweiter Stufe
(6 Koordinaten)

Sonderfall ESZ:

$$
\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}
$$

symmetrischer Tensor zweiter Stufe
(4 Koordinaten)

Sonderfall ebener Verzerrungszustand (EVZ):

Alle Verzerrungen liegen in einer Ebene, z. B. in der x,y-Ebene:

$$
\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}
$$

symmetrischer Tensor zweiter Stufe
(3 Koordinaten)

Der EVZ ist exakt im Sinne der Elastizitätstheorie.
Dieser liegt näherungsweise in einem langen Zylinder vor.

Verzerrungstransformation (wie bei den Spannungen):

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\sin 2\varphi + \gamma_{xy}\cos 2\varphi$$

Hauptdehnungen:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2} \tag{1.14}$$

Dehnungs-Hauptachsen:

$$\tan 2\varphi_{1,2} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \tag{1.15}$$

Verträglichkeitsbedingungen (Kompatibilitätsbedingungen):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_{x,x} && \Rightarrow && \varepsilon_{xx,yy} &= u_{x,xyy} \\
\varepsilon_{yy} &= u_{y,y} && \Rightarrow && \varepsilon_{yy,xx} &= u_{y,yxx} \\
\gamma_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} && \Rightarrow && \gamma_{xy,xy} &= u_{x,xyy} + u_{y,xxy}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \gamma_{xy,xy} = 0$$

Analog bzw. leicht zu überprüfen:

$$\varepsilon_{xx,zz} + \varepsilon_{zz,xx} - \gamma_{xz,xz} = 0$$

$$\varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - \gamma_{yz,yz} = 0$$

$$2\,\varepsilon_{xx,yz} + \left(\gamma_{yz,x} - \gamma_{zx,y} - \gamma_{xy,z}\right)_{,x} = 0$$

$$2\,\varepsilon_{yy,xz} + \left(\gamma_{zx,y} - \gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x}\right)_{,y} = 0$$

$$2\,\varepsilon_{zz,xy} + \left(\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} - \gamma_{zx,y}\right)_{,z} = 0$$

oder in Kurzschreibweise:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad \text{mit:} \quad (i,\,j),(k,\,l) = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(x,z),(y,z)\}.$$

Bei diesen 6 Gleichungen sind nur 3 unabhängig.

Eine noch kürzere Schreibweise lässt die Verwendung des Permutationssymbols zu:

$$\varepsilon_{ij,kl} \in_{ikm} \in_{jln} = 0 \qquad \text{mit: } (m, n) = \{x, y, z\}$$

$\in$ Permutationssymbol [1/3] (1.16)

Zu bemerken ist, dass die Kompatibilitätsbedingungen formal aus den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen folgen und damit keinen neuen Sachverhalt beschreiben.

3 Stoffgesetz

Stoffgesetz – Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen
Formulierung für homogenes, isotropes, linear-elastisches Material:
HOOKEsches Gesetz (Robert Hooke, 1635-1703)

Formulierung (einschließlich thermischer Dehnung) für die Verzerrungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right] + \alpha\,\Delta T$$

ΔT Temperaturdifferenz

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

oder:

$$d_{kl} = \frac{1}{2\,G}\left(t_{kl} - \frac{\nu}{1+\nu}\,s\,\delta_{kl}\right) + +\alpha\,\Delta T\,\delta_{kl}$$

$$s = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

δ_{kl} KRONECKERsymbol [1/4] (Leopold Kronecker, 1823-1891)
s Spannungssumme (1.17)

Formulierung für die Spannungen:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,e\right) - \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,E\,\alpha\,\Delta T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,e\right) - \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,E\,\alpha\,\Delta T$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,e\right) - \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,E\,\alpha\,\Delta T$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\,\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}$$

e Dehnungssumme

oder:

$$t_{kl} = 2\,G\left(d_{kl} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,e\,\delta_{kl}\right) - \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,E\,\alpha\,\Delta T\,\delta_{kl} \qquad (1.18)$$

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Materialkenngrößen:

α	Temperaturdehnzahl
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
ν	Querkontraktionszahl

Zusammenhang: $$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.20)$$

Bei isotropem Materialverhalten fallen die Hauptachsen für die Verzerrungen mit denen für die Spannungen zusammen.
Beweis (für EVZ):

In die Gleichung für die Verzerrungs-Hauptachsen wird das Materialgesetz eingesetzt und ergibt:

$$\tan\varphi_{1,2} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} = \frac{\tau_{xy}\quad E}{G\quad\left(\sigma_{xx} - \nu\,\sigma_{yy} - \sigma_{yy} + \nu\,\sigma_{xx}\right)} = \frac{G\,2\,(1+\nu)}{G\,(1+\nu)}\,\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\quad .$$

4. Zusammenstellung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie (kartesische Koordinaten)

Unbekannte / Gleichungen	RSZ		ESZ	
Spannungen	6	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz},$ $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	3	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy},$ τ_{xy}
Verschiebungen	3	u_x, u_y, u_z	3	u_x, u_y, u_z
Verzerrungen	6	$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz},$ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	4	$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz},$ γ_{xy}
$\sum$	15		10	
		$(k,l) = \{x, y, z\}:$		$(k,l) = \{x, y, z\}:$
Gleichgewichtsbedingungen	3	$t_{kl,k} + f_l = 0$	2	$t_{kl,k} + f_l = 0 \qquad (k,l) \neq z$
Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen	6	$d_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)$	4	$\varepsilon_{kk} = u_{k,k}$ $\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x}$
Stoffgesetz	6	$d_{kl} = \frac{1}{2G}\left(t_{kl} - \frac{\nu}{1+\nu} s\, \delta_{kl}\right)$ $+\alpha\, \Delta T\, \delta_{kl}$	4	$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2G}\left[\sigma_{kk} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right]$ $+\alpha\, \Delta T$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$
$\sum$	15		10	

Für die 15 bzw. 10 Feldgrößen stehen damit auch 15 bzw. 10 Feldgleichungen zur Verfügung.
Da die Feldgleichungen in der Regel die Form von Differentialgleichungen haben, sind zur eindeutigen Lösung eines konkreten Problems Randbedingungen zu erfüllen.
Diese bestehen meistens in der Vorgabe von Belastungen auf einem Teil der Oberfläche des Körpers bzw. in vorgeschriebenen Verschiebungen auf dem anderen Teil:

- Nur Belastungen: 1. Randwertproblem
- Nur Verschiebungen: 2. Randwertproblem
- Gemischte Randbedingungen: 3. Randwertproblem