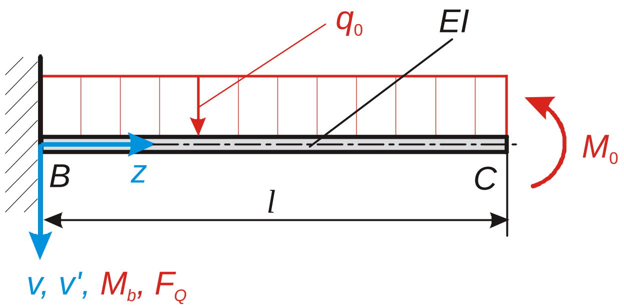
Gegenüberstellung der Lösungen nach Biegelinie DGL 4. Ordnung – DGL 2. Ordnung

Beispiel



Geg.: q_0, M_0, l, EI = konst.

Ges.:
1. Verläufe der Schnittgrößen, Balkendurchbiegung und –neigung
2. Zusammenhang zwischen M_0, q_0 und l so, dass $v_C = 0$ gilt
3. Diagramm der Verläufe für Spezialfall

DGL der Biegeline

4. Ordnung

$$EIv^{IV} = q(z) = q_0$$

$$EIv''' = -F_Q(z) = q_0\, z + C_1$$

$$EIv'' = -M_b(z) = \frac{q_0}{2} z^2 + C_1\, z + C_2$$

$$EIv' = \frac{q_0}{6} z^3 + \frac{1}{2} C_1\, z^2 + C_2\, z + C_3$$

$$EIv = \frac{q_0}{24} z^4 + \frac{1}{6} C_1\, z^3 + \frac{1}{2} C_2\, z^2 + C_3\, z + C_4$$

2. Ordnung

$$EIv'' = -M_b(z) = -M_0 + \frac{q_0}{2}(l-z)^2 = -M_0 + q_0\left(\frac{l^2}{2} - l\,z + \frac{z^2}{2}\right)$$

$$EIv' = -M_0\, z + q_0\left(\frac{l^2}{2} z - \frac{l}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3\right) + K_1$$

$$EIv = -\frac{M_0}{2} z^2 + q_0\left(\frac{l^2}{4} z^2 - \frac{l}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4\right) + K_1\, z + K_2$$

Randbedingungen, Integrationskonstanten	
$v(z=0)=0$ $C_4=0$ $v^{I}(z=0)=0$ $C_3=0$ $EIv^{II}(z=l)=-M_0$ $\frac{q_0\,l^2}{2}+C_1\,l+C_2=-M_0$ $EIv^{III}(z=l)=0$ $q_0\,l+C_1=0$ $C_1=-q_0\,l$ $C_2=-M_0+\frac{q_0\,l^2}{2}$	$v(z=0)=0$ $K_2=0$ $v^{I}(z=0)=0$ $K_1=0$

Lösung	
$F_Q(z)=q_0\,(l-z)$ $M_b(z)=M_0-\frac{q_0}{2}(l-z)^2$ $v^{I}(z)=\frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{6}z^3-\frac{q_0\,l}{2}z^2+\frac{q_0\,l^2}{2}z-M_0\,z\right)$ $v(z)=\frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{24}z^4-\frac{q_0\,l}{6}z^3+\frac{q_0\,l^2}{4}z^2-\frac{M_0}{2}z^2\right)$	$v^{I}(z)=\frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{6}z^3-\frac{q_0\,l}{2}z^2+\frac{q_0\,l^2}{2}z-M_0\,z\right)$ $v(z)=\frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{24}z^4-\frac{q_0\,l}{6}z^3+\frac{q_0\,l^2}{4}z^2-\frac{M_0}{2}z^2\right)$ aus Ansatz (DGL): $M_b(z)=M_0-\frac{q_0}{2}(l-z)^2$ durch Differenziation: $F_Q(z)=q_0\,(l-z)$

Spezielle Werte
$F_Q(z=0) = q_0\, l$ $M_b(z=0) = M_0 - \frac{q_0}{2} l^2$ $v^I(z=l) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{6} l^3 - M_0\, l\right)$ $v(z=l) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{8} l^4 - \frac{M_0}{2} l^2\right)$
Bedingung $v_c = 0$
$v(z=l) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{8} l^4 - \frac{M_0}{2} l^2\right) = 0$ $\frac{q_0}{8} l^4 = \frac{M_0}{2} l^2 \quad \Rightarrow \quad M_0 = \frac{q_0\, l^2}{4}$
Spezielle Funktionen für $M_0 = \frac{q_0\, l^2}{4}$:
$F_Q(z) = q_0\,(l-z) = q_0\, l\left(1 - \frac{z}{l}\right)$ $M_b(z) = \frac{q_0\, l^2}{4} - \frac{q_0}{2}(l-z)^2 = \frac{q_0\, l^2}{4}\left(-1 + 4\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2}\right)$ $v^I(z) = \frac{q_0\, l^3}{6\, EI}\left(\frac{z^3}{l^3} - \frac{3}{2}\frac{z^2}{l^2} + \frac{3}{2}\frac{z}{l}\right)$ $v(z) = \frac{q_0\, l^4}{24\, EI}\left(\frac{z^4}{l^4} - 4\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{z^2}{l^2}\right)$

Diagramm der (normierten) speziellen Funktionen