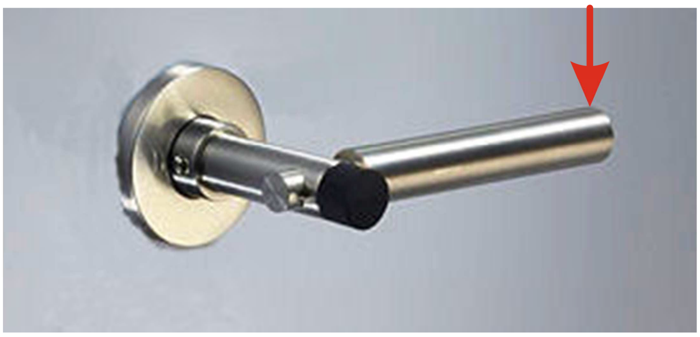
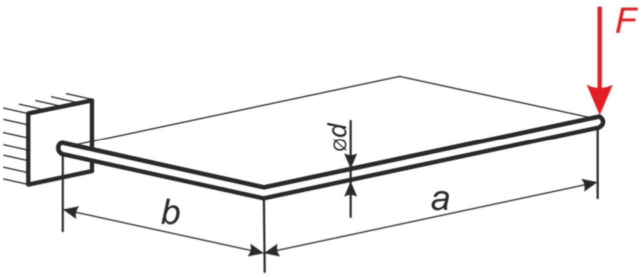
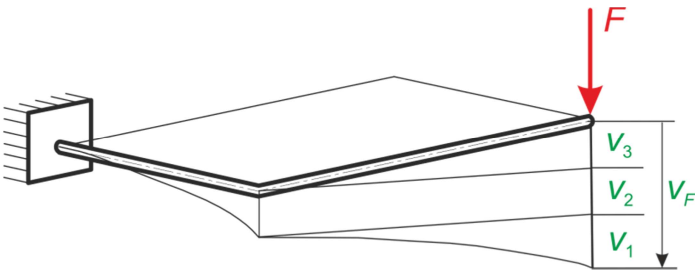




Geg.: F, a, b, d, E, ν

Ges.: v_F (Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft F)

Lösung durch Überlagerung der Einzelverformungen



$$v_F = v_1 + v_2 + v_3$$

v_1 Biegung des Bereiches der Länge a
v_2 Biegung des Bereiches der Länge b
v_3 Torsion des Bereiches der Länge b

$$v_1 = \frac{F\,a^3}{3\,E\,I}$$

$$I = \frac{\pi\,D^4}{64}$$

$$v_2 = \frac{F\,b^3}{3\,E\,I}$$

$$v_3 = \frac{M_t\,b}{G\,I_t}\,a$$

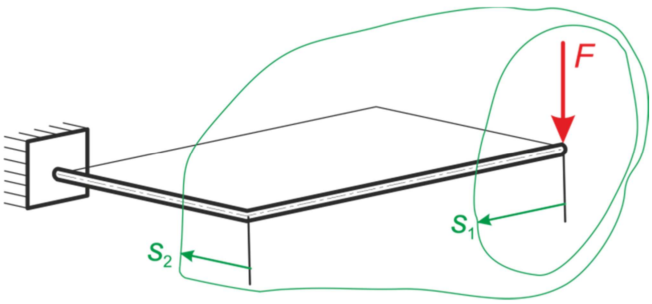
$$M_t = F\,a$$

$$I_t = \frac{\pi\,D^4}{32} = 2\,I$$

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$\underline{v_F} = \frac{F\,a^3}{3\,E\,\frac{\pi\,D^4}{64}} + \frac{F\,b^3}{3\,E\,\frac{\pi\,D^4}{64}} + \frac{F\,a}{\frac{E}{2\,(1+\nu)}\,\frac{\pi\,D^4}{32}}\,b\,a = \underline{\frac{64\,F}{\pi\,E\,D^4}\left[\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}+a^2\,b\,(1+\nu)\right]}$$

Lösung über Satz von CASTIGLIANO:



$$v_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^a \frac{M_{b1}}{E\,I}\,\frac{\partial M_{b1}}{\partial F}\,ds_1 + \int_0^b \frac{M_{b2}}{E\,I}\,\frac{\partial M_{b2}}{\partial F}\,ds_2 + \int_0^b \frac{M_t}{G\,I_t}\,\frac{\partial M_t}{\partial F}\,ds_2$$

$$M_{b1} = F\,s_1 \qquad \frac{\partial M_{b1}}{\partial F} = s_1 \qquad 0 \le s_1 \le a$$

$$M_{b2} = F\,s_2 \qquad \frac{\partial M_{b2}}{\partial F} = s_2 \qquad 0 \le s_2 \le b$$

$$M_t = F\,a \qquad \frac{\partial M_t}{\partial F} = a$$

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \qquad I_t = 2\,I$$

$$G\,I_t = \frac{E\,2\,I}{2\,(1+\nu)} = \frac{E\,I}{1+\nu}$$

$$v_F = \int_0^a \frac{F\,s_1}{E\,I}\,s_1\,ds_1 + \int_0^b \frac{F\,s_2}{E\,I}\,s_2\,ds_2 + \int_0^b \frac{F\,a}{\frac{E\,I}{1+\nu}}\,a\,ds_2$$

$$v_F = \frac{F}{E\,I}\left[\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}+a^2\,b\,(1+\nu)\right]$$

$$I = \frac{\pi\,D^4}{64}$$

$$\underline{v_F = \frac{64\,F}{\pi\,E\,D^4}\left[\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}+a^2\,b\,(1+\nu)\right]}$$

Wichtig: Die berechnete Verschiebung des Kraftangriffspunktes ist nur die in Richtung der Einzelkraft *F.* Zusätzlich treten noch Verschiebungen in den beiden senkrecht dazu stehenden Richtungen auf.