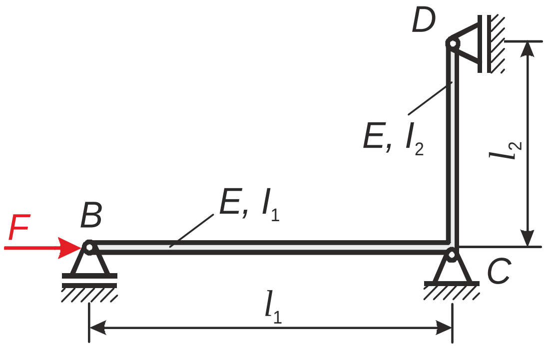
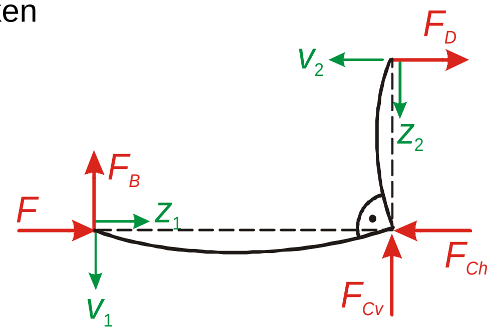


Geg.: E, I_1, I_2, l_1, l_2

Ges.: Kleinste kritische Last F_k, die zum Stabilitätsverlust führt
1. Eigenwertgleichung allgemein
2. F_k für $I_1 = I_2$ und $l_1 = 2\, l_2$

Anm.: Last ist richtungstreu

Gleichgewichtsbedingungen am (verformten) Balken



$$\rightarrow: \quad F - F_{Ch} + F_D = 0$$

$$\uparrow: \quad F_B + F_{Cv} = 0$$

$$\curvearrowleft C: \quad -F_B\, l_1 - F_D\, l_2 = 0$$

Schnittmomente im verformten Balken

$$M_{b1} = F_B\, z_1 + F\, v_1 \qquad\qquad M_{b2} = F_D\, z_2$$

DGLn der elastischen Linie

$$EI_1\, v_1'' = -M_{b1} = -F_B\, z_1 - F\, v_1 \qquad\qquad EI_2\, v_2'' = -M_{b2} = -F_D\, z_2 = F_B\, \frac{l_1}{l_2}\, z_2$$

$$EI_1\, v_1'' + F\, v_1 = -F_B\, z_1$$

$$v_1'' + \alpha^2\, v_1 = -\frac{F_B}{EI_1}\, z_1$$

$$\text{mit:} \quad \alpha^2 = \frac{F}{EI_1}$$

Lösung der DGLn

$$v_{1h} = C_1 \cos(\alpha z_1) + C_2 \sin(\alpha z_1) \qquad\qquad EI_2\, v_2' = F_B\, \frac{l_1}{l_2}\, \frac{z_2^2}{2} + C_3$$

$$v_{1p} = K_1 + K_2\, z_1 \qquad\qquad EI_2\, v_2 = F_B\, \frac{l_1}{l_2}\, \frac{z_2^3}{6} + C_3\, z_2 + C_4$$

$$\alpha^2 \left(K_1 + K_2\, z_1\right) = -\frac{F_B}{EI_1}\, z_1$$

$$K_1 = 0$$

$$K_2 = -\frac{F_B}{\alpha^2\, EI_1}$$

$$v_1 = C_1 \cos(\alpha z_1) + C_2 \sin(\alpha z_1) - \frac{F_B}{\alpha^2\, EI_1}\, z_1$$

Randbedingungen

$$v_1(0) = 0 \qquad C_1 = 0$$

$$v_1(l_1) = 0 \qquad C_2 \sin(\alpha l_1) - \frac{F_B}{\alpha^2 EI_1} l_1 = 0$$

$$v_2(0) = 0 \qquad C_4 = 0$$

$$v_2(l_2) = 0 \qquad F_B \frac{l_1 l_2}{6} + C_3 = 0$$

$$v_1'(l_1) = v_2'(l_2) \qquad C_2 \alpha \cos(\alpha l_1) - \frac{F_B}{\alpha^2 EI_1} = \frac{F_B}{EI_2} \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{1}{EI_2} C_3$$

Gleichungssystem für C_2, C_3 und F_B

$$\sin(\alpha l_1) C_2 - \frac{l_1}{\alpha^2 EI_1} F_B = 0$$

$$C_3 + \frac{l_1 l_2}{6} F_B = 0$$

$$\alpha \cos(\alpha l_1) C_2 - \frac{1}{EI_2} C_3 - \left(\frac{l_1 l_2}{2 EI_2} + \frac{1}{\alpha^2 EI_1} \right) F_B = 0$$

Koeffizientendeterminante = 0

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha l_1) & 0 & -\dfrac{l_1}{\alpha^2 EI_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_1 l_2}{6} \\ \alpha \cos(\alpha l_1) & -\dfrac{1}{EI_2} & -\dfrac{l_1 l_2}{2 EI_2} - \dfrac{1}{\alpha^2 EI_1} \end{vmatrix} = 0$$

Eigenwertgleichung

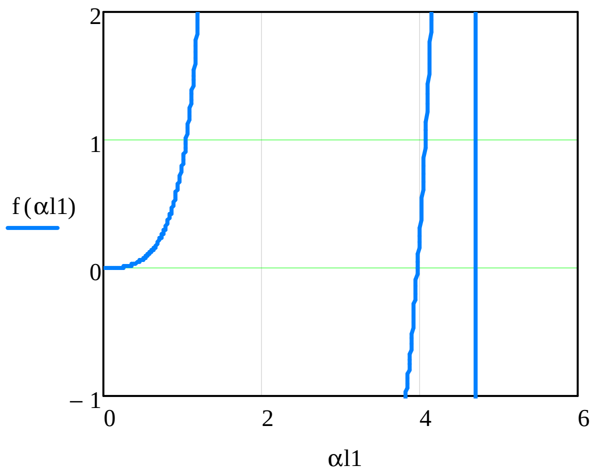
$$\left[1 + \frac{1}{3} \frac{l_2}{l_1} \frac{I_1}{I_2} (\alpha l_1)^2 \right] \tan(\alpha l_1) - \alpha l_1 = 0$$

Lösung der Eigenwertgleichung

$$\frac{I_1}{I_2} = 1 \qquad \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{2}: \qquad \left[1 + \frac{(\alpha l_1)^2}{6} \right] \tan(\alpha l_1) - \alpha l_1 = 0$$

Wurzel der Gleichung über Mathematikprogramm (Hier: Mathcad)

$$f(\alpha l1) := \left(1 + \frac{\alpha l1^2}{6} \right) \tan(\alpha l1) - \alpha l1$$



Schätzwert: Wurzel:

$\alpha l1 := 0$	$r1 := \mathrm{wurzel}(f(\alpha l1), \alpha l1)$	$r0 = 0$	Wurzel hat nur rechnerische Bedeutung System wäre unbelastet
$\alpha l1 := 4$	$r0 := \mathrm{wurzel}(f(\alpha l1), \alpha l1)$	$r1 = 3.972$	**kleinster** technisch relevanter Eigenwert

Kritische Last

$$\alpha l_1 = \sqrt{\frac{F_k}{EI_1}}\, l_1 = 3{,}972$$

$$\underline{F_k = 3{,}972^2 \frac{EI_1}{l_1^2}}$$

Zum Vergleich 2. EULERfall: $F_k = \pi^2 \dfrac{EI}{l^2}$